



**Titre:** Formulation faible des équations de Navier-Stokes non inertielle en rotation pure en éléments finis spectraux  
**Title:**

**Auteur:** Pascal Boulos  
**Author:**

**Date:** 2019

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Boulos, P. (2019). Formulation faible des équations de Navier-Stokes non inertielle en rotation pure en éléments finis spectraux [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/3829/>  
**Citation:**

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/3829/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** André Garon, & Dominique Pelletier  
**Advisors:**

**Programme:** Génie mécanique  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FORMULATION FAIBLE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES NON INERTIELLE  
EN ROTATION PURE EN ÉLÉMENTS FINIS SPECTRAUX

PASCAL BOULOS  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
MARS 2019

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

FORMULATION FAIBLE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES NON INERTIELLE  
EN ROTATION PURE EN ÉLÉMENTS FINIS SPECTRAUX

présenté par : BOULOS Pascal

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., président

M. GARON André, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. VETEL Jérôme, Doctorat, membre

## DÉDICACE

*À tous ceux qui ont eu la patience d'endurer mon exubérance,  
mon positivisme aveugle et ma négativité optimiste,  
Don't be strangers. . .*

## REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord à messieurs Garon, Pelletier et Camarero pour leur temps, leur support, leurs réponses et leurs conseils. Sans eux, ce document n'aurait jamais vu le jour et s'il est en quoi que ce soit remarquable : il est leur accomplissement. Les fautes sont les miennes.

Merci à monsieur Vétel pour les animations qu'il a fourni pour les simulations.

Merci à Théophile Raux, Guillaume Émond et Arthur Bawin pour leur oreille attentive et leur point de vue nouveau.

Mention d'honneur à tous ceux qui ont d'une manière ou d'une autre supporté ou financé mes projets, mes études et mon futur.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire est en deux parties. Dans la première partie, des éléments spectraux simplexes sont présentés pour permettre facilement l'adaptation de maillage. Ceci est approprié, car l'implémentation de maillage adaptatif est plus aisée dans un contexte de maillage non structuré. Dans la littérature, les éléments simplexes sont de loin les plus utilisés pour la construction de maillages non-structurés.

Dans la seconde partie, nous simulons un problème d'interaction fluide-structure dans le repère accéléré de l'objet en rotation, pour améliorer la précision de la formulation faible des équations de Navier-Stokes couplée avec une ou plusieurs équations qui traduisent les forces sur l'objet. Une revue de l'art antérieur nous a permis d'identifier la formulation faible appropriée au problème étudié, et elle est ensuite implémentée dans un code d'éléments finis spectraux. De nouvelles conditions limites compatibles avec un tel système sont proposées. Les résultats sont obtenus pour une ellipse de ratio deux pour un dans un écoulement à un nombre de Reynolds de 1000 et comparés aux résultats de Weymouth (2014). Ces tests reproduisent bien les portraits de phases obtenus par Weymouth. Le code résultant est éventuellement utile pour étudier des systèmes hydrodynamiques et aérobalistiques. Des exemples sont des poutres dans une rivière, des ailes d'avions ou un projectile.

## ABSTRACT

This thesis is in two parts. Firstly, spectral elements are presented on a reference simplex. Simplex are chosen as they are the go-to elements for adaptive meshing. They are easier to work with since they are simpler in the context of non structured meshes.

Secondly, it is desirable to simulate fluid-structure interactions in pure rotation while remeshing the geometry to obtain a solution that allows to capture the solution for the next time step as precisely as possible. The wrong choice of mesh can lead to a solution that is difficult to obtain. A good mesh can be generated by an adaptive meshing algorithm or heuristic based on the error of the solution without which a knowledge of the problem or the theoretical solution is necessary.

To improve the precision and calculation time, two strategies are proposed: adaptive remeshing and a non inertial weak formulation of the Navier-Stokes equations coupled with equations that translate efforts applied to the structure. In the context of adaptive meshing, an unstructured mesh of elements is appropriate. Thus spectral simplex elements are presented as they are easy to adapt. A weak formulation is also explicated and implemented in a spectral element method code. New boundary value conditions are proposed to work in such a system. Results of simulations are obtained for an ellipse of ratio 2 : 1 in a flow at Reynolds number 1000. These are compared to previously published results (Weymouth, 2014). Those tests reproduce fairly well the phase portraits obtained by Weymouth. The resulting code is eventually applicable to hydrodynamic and aeroballistic systems. Examples of such systems would be beam-like structures in a river, an aeroplane wing, a fuselage or projectiles.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xiii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xiv

## **I Développement d'éléments finis spectraux sur des simplexes 1**

CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	2
1.1 Définitions et concepts de base . . . . .	2
1.2 Éléments de la problématique . . . . .	4
1.3 Objectifs de recherche . . . . .	4
1.3.1 Objectifs détaillés de la section I . . . . .	5
1.4 Plan de la section I . . . . .	5
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	6
2.1 Historique . . . . .	6
2.2 Éléments . . . . .	7
2.3 Méthode spectrale . . . . .	8
2.3.1 Interpolation de degré élevé et phénomène de Runge . . . . .	8
2.3.2 Séries de sinus . . . . .	10
CHAPITRE 3 Éléments de référence simplexe . . . . .	14
3.1 Résolution d'une équation par la méthode des éléments finis . . . . .	14



3.1.1	Méthode de Ritz . . . . .	14
3.1.2	Méthode de Galerkin . . . . .	15
3.1.3	Méthode des éléments finis . . . . .	15
3.2	Construction des éléments spectraux en dimension 1 . . . . .	16
3.2.1	Polynômes d'interpolation en dimension 1 . . . . .	16
3.2.2	Constante de Lebesgue . . . . .	17
3.2.3	Distribution de points en dimension 1 . . . . .	17
3.2.4	Quadrature en dimension 1 . . . . .	23
3.2.5	Distributions des points en dimension 2 . . . . .	24
3.2.6	Construction des polynômes d'interpolation en dimension 2 . . . . .	31
3.2.7	Distribution des points en dimension 3 . . . . .	33
3.2.8	Quadratures en dimension 2, 3 et n . . . . .	38
CHAPITRE 4	CONCLUSION . . . . .	40
4.1	Synthèse des travaux . . . . .	40
4.1.1	Élément simplexe . . . . .	40
4.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	40
4.3	Améliorations futures . . . . .	40
 <b>II Solution des équations de Navier Stokes dans un repère accéléré en rotation en utilisant des éléments spectraux</b>		<b>41</b>
CHAPITRE 1	INTRODUCTION . . . . .	42
1.1	Définitions et concepts de base . . . . .	43
1.1.1	Référentiel non inertiel . . . . .	43
1.2	Éléments de la problématique . . . . .	45
1.3	Objectifs de recherche . . . . .	45
1.3.1	Objectifs détaillés . . . . .	45
1.4	Plan de la partie II . . . . .	46
CHAPITRE 2	REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	47
2.1	Référentiels non inertiels . . . . .	47
CHAPITRE 3	Équations de Navier-Stokes dans un référentiel non inertiel . . . . .	50
3.1	Référentiels inertiels et non inertiels . . . . .	50
3.1.1	Alternatives . . . . .	50
3.1.2	Approche choisie . . . . .	51

3.2	Formulations faibles modifiées . . . . .	52
3.3	Conditions limites . . . . .	52
3.3.1	Condition limite des équations de la dynamique du solide . . . . .	52
3.3.2	Conditions d'entrée et conditions de sortie libres et dissipatives . . . . .	54
3.4	Mise sans dimension . . . . .	55
3.4.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	55
3.4.2	Équation de mouvement . . . . .	55
CHAPITRE 4	Simulations et résultats numériques . . . . .	56
4.1	Méthodologie . . . . .	56
4.1.1	Maillages . . . . .	56
4.1.2	Programme d'éléments finis . . . . .	56
4.1.3	Schéma de discrétisation temporelle . . . . .	56
4.2	Conception de l'expérimentation . . . . .	57
4.2.1	Liste des tests . . . . .	57
4.3	Résultats . . . . .	57
4.3.1	Résultats pour $r/L = 0$ . . . . .	57
4.3.2	Résultats pour $r/L = 0.16$ . . . . .	59
4.3.3	Résultats pour $r/L = 0.18$ . . . . .	59
4.3.4	Résultats pour $r/L = 0.5$ . . . . .	59
CHAPITRE 5	CONCLUSION . . . . .	68
5.1	Synthèse des travaux . . . . .	68
5.1.1	Équations de Navier-Stokes non inertielles . . . . .	68
5.1.2	Conditions limites modifiées . . . . .	68
5.2	Simulations et résultats . . . . .	68
5.3	Limitations de la solution proposée . . . . .	69
5.4	Améliorations futures . . . . .	69
RÉFÉRENCES	. . . . .	70
ANNEXES	. . . . .	74

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Matrice de Vandermonde . . . . .	25
Tableau 3.2	Conditionnement des polynômes de Proriot . . . . .	26
Tableau D.1	Exemple de points en 2 dimensions pour $m = 3$ . . . . .	81
Tableau D.2	Exemple de points en 2 dimensions pour $m = 4$ . . . . .	81
Tableau E.1	Exemple de points en 3 dimensions pour $m=3$ . . . . .	82
Tableau E.2	Exemple de points en 3 dimensions pour $m=4$ . . . . .	83

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Triangulation possible et pavage impossible . . . . .	4
Figure 2.1	Éléments proposés par Taylor et Hood et par Crouzeix et Raviart . .	7
Figure 2.2	Polynôme de Lagrange avec des points de collocations équidistants pour $n = 9$ . . . . .	8
Figure 2.3	Polynôme de Lagrange avec des points de collocations qui sont les points de Lobatto pour $n = 9$ . . . . .	9
Figure 2.4	Phénomène de Runge . . . . .	10
Figure 2.5	Phénomène de Runge mitigé . . . . .	11
Figure 2.6	Phénomène de Runge sur une exponentielle . . . . .	11
Figure 2.7	Convergence de développement en série (Gottlieb et Orszag, 1977) . .	13
Figure 3.1	Constante de Lebesgue de différents ensembles de points en dimension 1	19
Figure 3.2	Constante de Lebesgue de différents ensembles de points en dimension 1	20
Figure 3.3	Exemple des points équidistants, sinusoidaux et de Legendre pour $n=6$	21
Figure 3.4	Corail montrant une approximation du problème de Tamme d'une distribution uniforme sur une sphère (Hudson, 2010) . . . . .	22
Figure 3.5	Alvéoles d'abeilles montrant une approximation du problème de Tamme d'une distribution uniforme sur un plan (Waugtsberg, 2017) . . . . .	26
Figure 3.6	La méthode des trapèzes est exacte sur un polynôme de degré 0 ou 1	27
Figure 3.7	Points équidistants et de Legendre pour $n = 5$ sur un carré . . . . .	27
Figure 3.8	Exemple d'une grille équidistante (Blyth et Pozrikidis, 2005) . . . . .	28
Figure 3.9	Exemple d'une grille améliorée avec les zéros des polynômes de Lobatto (Blyth et Pozrikidis, 2005) . . . . .	28
Figure 3.10	Comparaison des points de Fekete qui minimisent le déterminant de la matrice de Vandermonde (o) et des points du triangle de Lobatto de Blyth (+) (Blyth et Pozrikidis, 2005) . . . . .	29
Figure 3.11	Triangle de référence . . . . .	30
Figure 3.12	Transformation de Duffy (Blyth et Pozrikidis, 2005) . . . . .	33
Figure 3.13	Discrétisation du carré . . . . .	34
Figure 3.14	Conditionnement de la matrice masse . . . . .	35
Figure 3.15	Transformation de Duffy en dimension 3 . . . . .	38
Figure 1.1	Efforts sur l'objet en rotation autour du centre $O$ . . . . .	44
Figure 2.1	Effet d'hystérésis sur des simulations avec de grandes accélérations (Roohani et Skews, 2008) . . . . .	47

Figure 2.2	Structures tourbillonnaires générées par une ellipse dans un écoulement à un nombre de Reynolds de 1000 (Weymouth, 2014) . . . . .	49
Figure 4.1	Description de l'objet simulé (Weymouth, 2014) . . . . .	56
Figure 4.2	Réponse de référence (Weymouth, 2014) . . . . .	58
Figure 4.3	Réponse temporelle pour $r/L = 0$ . . . . .	60
Figure 4.4	Diagramme de phase pour $r/L = 0$ . . . . .	61
Figure 4.5	DSP pour $r/L = 0$ . . . . .	61
Figure 4.6	Réponse temporelle pour $r/L = 0.16$ . . . . .	62
Figure 4.7	Diagramme de phase pour $r/L = 0.16$ . . . . .	63
Figure 4.8	Densité spectrale de puissance (DSP) pour $r/L = 0.16$ . . . . .	63
Figure 4.9	Réponse temporelle pour $r/L = 0.18$ . . . . .	64
Figure 4.10	Diagramme de phase pour $r/L = 0.18$ . . . . .	65
Figure 4.11	DSP pour $r/L = 0.18$ . . . . .	65
Figure 4.12	Réponse temporelle pour $r/L = 0.5$ . . . . .	66
Figure 4.13	Diagramme de phase pour $r/L = 0.5$ . . . . .	67
Figure 4.14	DSP pour $r/L = 0.5$ . . . . .	67

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

EFS	Éléments Finis Spectraux
DSP	Densité Spectrale de Puissance
IFS	Interactions Fluides-Structures
MEF	Méthode des Éléments Finis
PCE	Points de Collocation Équidistants

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Maillage . . . . .	74
Annexe B	Calcul de l'interpolant sur un triangle . . . . .	75
Annexe C	Calcul de l'interpolant sur un tétraèdre . . . . .	78
Annexe D	Exemples de points de Blyth . . . . .	81
Annexe E	Exemples de points de Luo . . . . .	82

## Première partie

# Développement d'éléments finis spectraux sur des simplexes



## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Lors de l'implémentation de l'adaptation de maillage, il est facile de trouver de bons algorithmes d'adaptation sur des simplexes. Ce sont en effet les éléments les plus communs dans la littérature. Sachant cela, nous présentons des éléments finis spectraux sur des simplexes.

Pour que cet élément simplexe soit utilisable, la condition est que l'on connaisse un ensemble de  $n$  points de collocations,  $n$  polynômes et une quadrature sur son domaine. Le problème est alors de proposer des éléments finis spectraux qui sont de bonne qualité :

- l'interpolation sur le simplexe comporte peu d'erreur ;
- ils possèdent une quadrature exacte ;
- et la convergence de leur interpolation est spectrale.

L'intérêt de faciliter l'implémentation de l'adaptation de maillage est de réduire au minimum le nombre d'éléments nécessaires ou, plus précisément, réduire le nombre de degré de liberté du système algébrique à résoudre.

### 1.1 Définitions et concepts de base

**Définition 1.** *La **méthode de Ritz** fait référence à l'utilisation de l'interpolation comme support de résolution d'une équation sur un domaine entier. Cela se fait par des fonctions tests et des fonctions d'interpolation qui modélisent le système à résoudre.*

**Définition 2.** *La **méthode de Galerkin** est la méthode de Ritz où les fonctions d'interpolation et les fonctions tests sont les mêmes.*

**Définition 3.** *La **Méthode des Éléments Finis (MEF)** fait référence à une méthode de résolution numérique d'une équation différentielle par une discrétisation particulière du domaine en éléments. Souvent, elle est implémentée comme la méthode de Galerkin aux niveaux des éléments qui constituent le domaine.*

Par exemple, l'équation de convection-diffusion peut être résolue :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = f \quad (1.1)$$

où  $T$  est la variable primaire,  $t$  est le temps,  $k$  est le coefficient de diffusion de  $T$ ,  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse et  $f$  est un terme source.

Le principe est que le domaine sur lequel l'équation est résolue est discrétisé en éléments et sur chaque élément la solution est approchée par une somme de polynômes. Pour les éléments finis traditionnels, des polynômes d'interpolation de Lagrange linéaires ou quadratiques sont utilisés.

**Définition 4.** *L'**interpolation** fait référence à une méthode de reconstruction d'une fonction à travers des points connus sur un domaine. Le choix de l'interpolation change significativement l'erreur de discrétisation. Le but est de réduire considérablement le nombre d'éléments et le temps de simulation.*

**Définition 5.** *Par **quadrature**, et parfois cubature en dimension 3, on entend une intégration numérique. Dans ce mémoire, des quadratures sur des simplexes sont présentées pour tenir compte de l'ajout des éléments spectraux sur des simplexes. En pratique, elles sont choisies de degré suffisant pour intégrer avec précision les approximations polynomiales définies sur l'élément de référence.*

**Définition 6.** *Les **éléments finis spectraux** font référence à une amélioration à la méthode des éléments finis. Dans ce cas, les points de collocations des polynômes d'interpolation sont des points qui permettent une convergence spectrale lorsque le degré des polynômes augmentent. Ces polynômes sont choisis, car ils réduisent l'effet de Gibbs et améliorent le conditionnement du système algébrique. En algèbre numérique, la borne supérieure de l'erreur relative de la solution du système algébrique est proportionnelle au conditionnement et à l'erreur-machine( $\epsilon$ ).*

## 1.2 Éléments de la problématique

Les éléments de type simplexe sont présentés, car ils s'inscrivent dans la méthode des éléments finis spectraux qui est proposée. De plus, ils sont communément utilisés dans l'adaptation de maillage. Ceci provient du fait que connaissant un groupe de points dans  $\mathbb{R}^N$ , il existe une triangulation appropriée et des algorithmes pour les obtenir (Delaunay et al., 1934; Bowyer, 1981; Watson, 1981; Chew, 1993; Ruppert, 1995). Ceci n'est pas le cas pour des pavages aussi connus sous le nom de *tessellations* (angl.). Par exemple, en 2 dimensions, si le nombre de points le long de l'enveloppe est impair, il est possible qu'il n'existe pas de pavage. Ceci s'explique par le fait qu'un  $n$ -hypercube ajoute toujours un nombre pair de points à son enveloppe, alors qu'un  $n$ -simplexe n'ajoute qu'un seul point (Bose et Toussaint, 1995). La figure 1.1 illustre ce comportement.

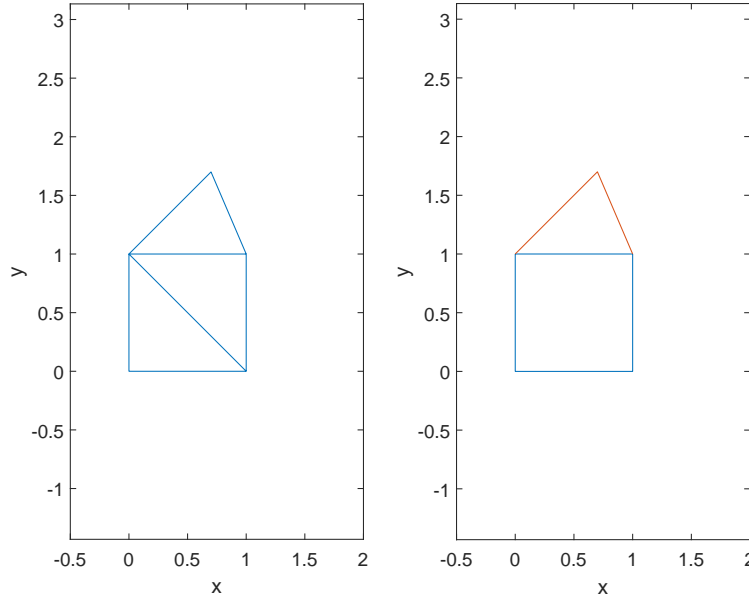


Figure 1.1 Triangulation possible et pavage impossible. En rouge, un élément ne peut être discrétisé par un quadrangle.

## 1.3 Objectifs de recherche

Les objectifs de la recherche sont :

1. **développer** des éléments spectraux de degré  $n$  sur des simplexes ;
2. **identifier** des méthodes de construction des distributions de points qui respectent la convergence spectrale et qui conservent la symétrie des points sur les simplexes ;

3. **développer** un algorithme pour évaluer les polynômes d'interpolation aux points de quadratures qui soit sans polynôme ou avec une construction explicite des polynômes.
4. **mesurer** la qualité de la construction spectrale des polynômes d'interpolation.

### 1.3.1 Objectifs détaillés de la section I

Pour développer des éléments spectraux de degré  $n$  sur des simplexes, une interpolation doit être définie sur le domaine. Cette interpolation demande un ensemble de points de collocation qui respectent la convergence spectrale et qui conservent la symétrie des points sur les simplexes. Il faut aussi mesurer la qualité de la construction spectrale des polynômes d'interpolation.

Nous présentons alors une méthode pour générer les points de collocations sur les simplexes. Utilisant ces points, il est possible de résoudre un système algébrique pour évaluer les polynômes d'interpolation. Une fois ceux-ci construits, nous présentons des mesures d'erreurs sur ces interpolants.

Il est aussi nécessaire de développer un algorithme pour évaluer les polynômes d'interpolation aux points de quadratures qui soit sans polynôme ou avec une construction explicite des polynômes.

## 1.4 Plan de la section I

La première partie est divisée en 3 chapitres. Le chapitre 2 est une revue de la littérature qui traite du développement des éléments finis et des éléments spectraux.

Au chapitre 3, nous discutons de la construction des éléments finis spectraux en dimension 1, 2 et 3. Nous discutons de l'importance de la constante de Lebesgue et comment la valeur de celle-ci est influencée par la distribution des points de collocation des polynômes spectraux. Nous terminons par la construction des règles de quadratures pour les polynômes spectraux.

Au chapitre 5, la conclusion, nous présentons une synthèse des travaux de cette partie. Nous identifions les limites de la contribution.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

### 2.1 Historique

La méthode des éléments finis date d’au moins 1909, date d’une publication par Walter Ritz d’une méthode de résolution d’un problème variationnel (Ritz, 1909). Étant donné l’âge de la méthode, son historique ne contiendra que les jalons les plus pertinents. Galerkin a notamment appliqué la méthode de Ritz où les fonctions tests sont construites par les polynômes d’interpolation qui sont utilisés pour approcher la solution.

Richard Courant traite de la théorie nécessaire pour transformer une équation aux dérivées partielles en un système algébrique qui peut être résolu numériquement. Il traite de plusieurs exemples. Son approche se veut surtout une contribution aux mathématiques appliquées à la physique (Courant et al., 1928; Courant, 1943).

Des applications deviennent disponibles dès la fin des années 1940. Hrennikoff se base sur les travaux publiés pour appliquer une méthode analogue aux éléments finis à la déformation élastique de tiges et de plaques. Il modélise des plaques par un réseau de barres élastiques de petite taille (Hrennikoff, 1941).<sup>1</sup> C’est un bon exemple de son usage pour l’analyse des contraintes en élasticité linéaire.

En aéronautique, dès 1956, , les limites des tests sur des modèles physiques deviennent évidentes. Ceci est dû aux changements fréquents de design ou d’interactions entre les différents phénomènes impliqués dans une aile d’avion : flexion, vibration, l’effet sur la stabilité et le contrôle, l’effet dynamique de l’écoulement autour de l’aile (Gledhill et al., 2016).

Turner propose de décomposer les structures en composantes où le comportement des matériaux sous une charge est connu, c’est-à-dire des plaques, des lignes, etc. Sur ces éléments, il assemble ensuite le système d’équations puisqu’il connaît les connexions entre les différentes composantes. La méthode numérique proposée est une première variation des éléments finis limitée à des géométries connues ou divisibles en des éléments connus (Turner, 1956).

Plusieurs développements à la théorie des éléments finis ont été décrits pour les équations de Navier-Stokes. La stabilité des équations est soumise à la condition de Ladyzenskaya-Babuška-Brezzi qui décrit les conditions de compatibilité des intepersolants de vitesse et de pression (Brezzi, 1974; Babuška et Aziz, 1972).

---

1. Traduction libre de *framework of articulated elastic bars*.

## 2.2 Éléments

Les éléments les plus connus sont ceux de Taylor et Hood (1973) et ceux de Crouzeix et Raviart (1973). Des exemples sont montrés à la figure 2.1

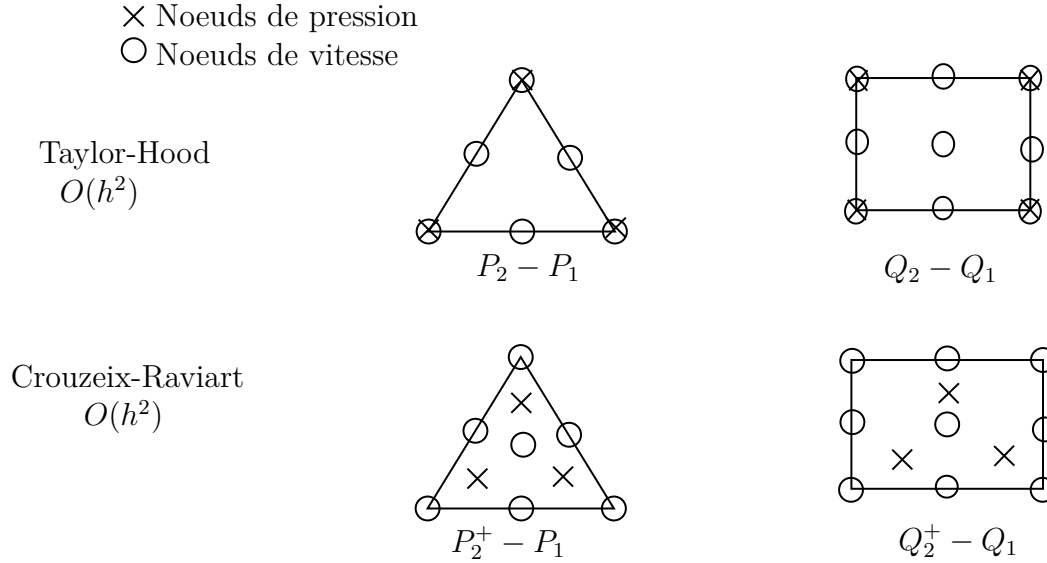


Figure 2.1 Éléments proposés par Taylor et Hood et par Crouzeix et Raviart (Pelletier, 2017). Les éléments ne sont pas à l'échelle.

D'autres éléments sont parfois utilisés. Le choix dépend de l'application étant donné qu'ils ne possèdent pas tous les mêmes propriétés. Par exemple, la pression est continue pour les éléments de Taylor-Hood, et elle est discontinue pour les éléments de Crouzeix-Raviart. Ainsi, les éléments Crouzeix-Raviart conservent la masse localement alors que les Taylor-Hood conservent la masse globalement.

Les éléments que nous présentons sont des éléments de Taylor-Hood, puisque la pression se veut continue aux jonctions entre les éléments.

## 2.3 Méthode spectrale

### 2.3.1 Interpolation de degré élevé et phénomène de Runge

La méthode des éléments finis spectraux décrit une modification à la méthode des éléments finis. Les polynômes d'interpolation utilisés sont remplacés par des polynômes de degré élevé où les points de collocations induisent une convergence spectrale des polynômes d'interpolation. Ces polynômes permettent moins d'erreur en réduisant l'erreur de troncature. Ils permettent alors d'utiliser des éléments de plus grande dimension dans les approximations par éléments finis sans compromettre la précision du calcul. Un résultat équivalent en utilisant une densité d'élément plus grande d'élément conventionnel.

Les polynômes de degré élevé tendent à avoir un effet oscillatoire significatif près des bords du domaine comme le montre la figure 2.2. Ceci est particulièrement vrai lorsque les points équidistants sont utilisés comme point de collocation. Cette figure montre que les polynômes aux bords du domaine possèdent une amplitude significativement plus grande qu'au centre du domaine. Ce phénomène se nomme phénomène de Runge (Runge, 1901; Dahlquist et Bjork, 1974).

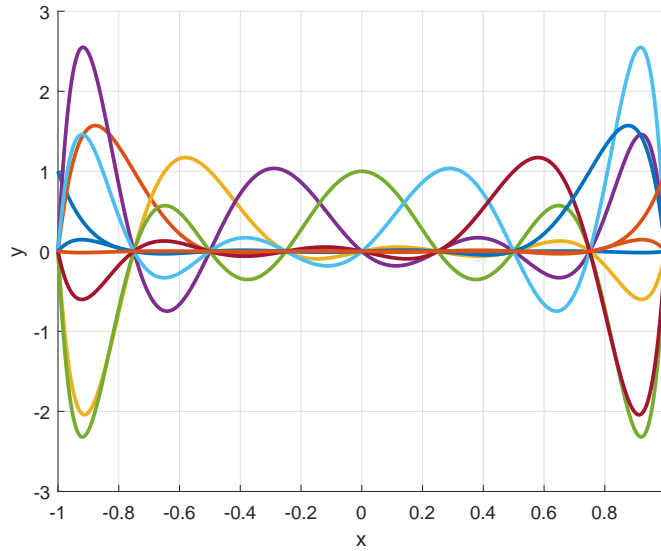


Figure 2.2 Polynôme de Lagrange avec des points de collocations équidistants pour  $n = 9$

La figure 2.3 montre que l'effet est significativement mitigé par un bon choix de points de collocations. La construction des polynômes de Lagrange aux points de collocation définis par les zéros des dérivées des polynômes de Legendre réduisent cet effet. Ces dérivées sont connus sous le nom de polynômes de Lobatto. Pour des polynômes de degrés 8, donc  $n = 9$

points de collocation, l'amplitude la plus grande passe de 2.5 à 1.05 approximativement.

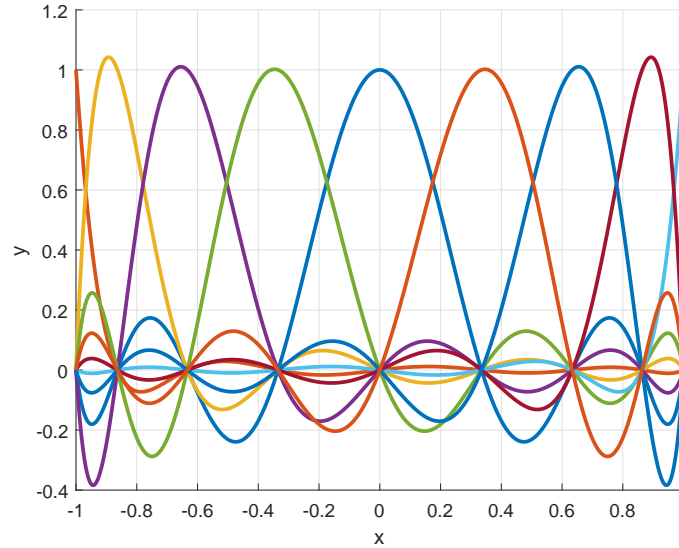


Figure 2.3 Polynôme de Lagrange avec des points de collocations qui sont les points de Lobatto pour  $n = 9$

Les figures 2.4 et 2.5 montrent l'effet du phénomène de Runge sur la qualité de l'interpolation. La figure 2.4 correspond à l'interpolation de Lagrange pour des points de collocation uniformément répartis. On remarque qu'en augmentant le degré du polynôme, la qualité de l'interpolation se détériore. Par contre, en utilisant des points de Lobatto, la figure 2.5 montre que les oscillations sont mieux contrôlées et que l'approximation polynomiale converge plus rapidement vers la solution analytique.

Toutefois, la manifestation du phénomène de Runge et ses conséquences sur la qualité de l'interpolation dépend du problème à approcher. Ainsi, la figure 2.6 illustre l'approximation d'une fonction par des polynômes de Lagrange avec des points de collocation équidistants. On remarque la bonne qualité de l'approximation polynomiale.



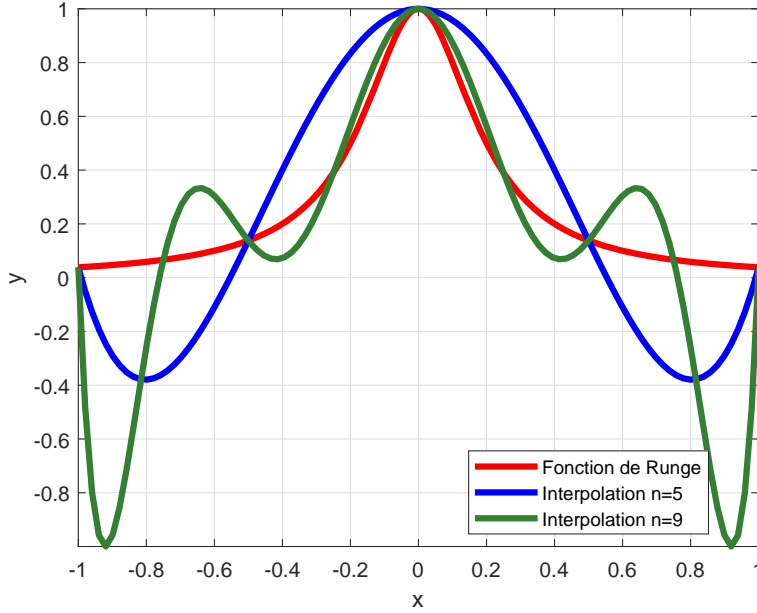


Figure 2.4 Phénomène de Runge montré sur  $1/(1 + 25x^2)$ , l'interpolation à  $n = 9$  points équidistants comporte une oscillation plus grande que celle à  $n = 5$ .

### 2.3.2 Séries de sinus

Gottlieb décrit la méthode spectrale, son bien-fondé et ses propriétés mathématiques (Gottlieb et Orszag, 1977). Il utilise notamment des interpolants en séries de sinus de Fourier <sup>2</sup>,

$$F_n(x) = \sin(nx) \quad (2.1)$$

des polynômes de Chebyshev,

$$C_0(x) = 1 \quad (2.2)$$

$$C_1(x) = x \quad (2.3)$$

$$C_n(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x) \quad (2.4)$$

---

2. Traduction libre de *Fourier sine series*.

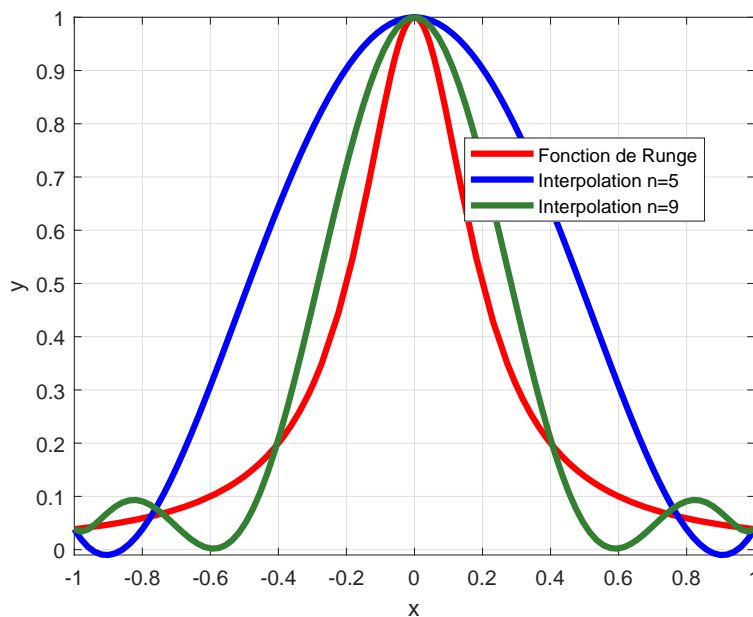


Figure 2.5 Phénomène de Runge montré sur  $1/(1 + 25x^2)$ , où le phénomène de Runge est mitigé par des points de Lobatto.

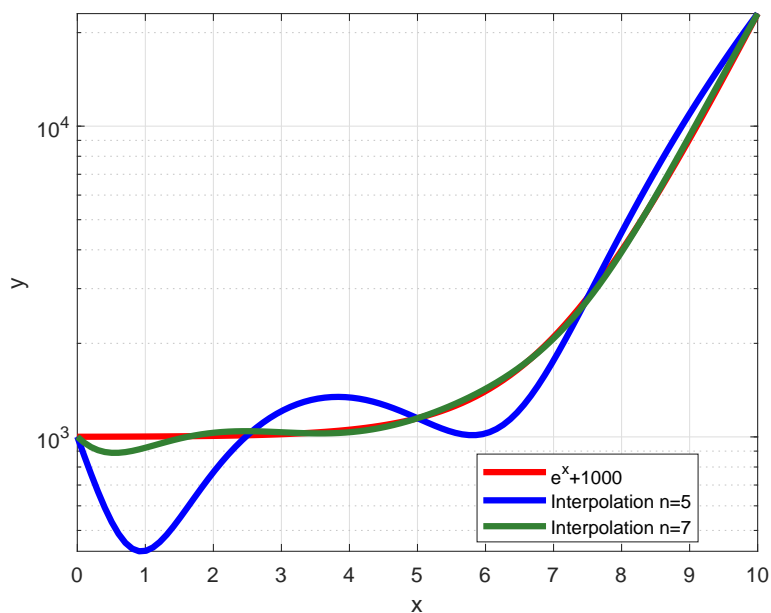


Figure 2.6 Phénomène de Runge montré sur  $e^x + 1000$ , l'interpolation à  $n = 7$  points équidistants comporte moins d'oscillation que celle à  $n = 5$ .

et les polynômes de Legendre,

$$L_0(x) = 1 \quad (2.5)$$

$$L_1(x) = x \quad (2.6)$$

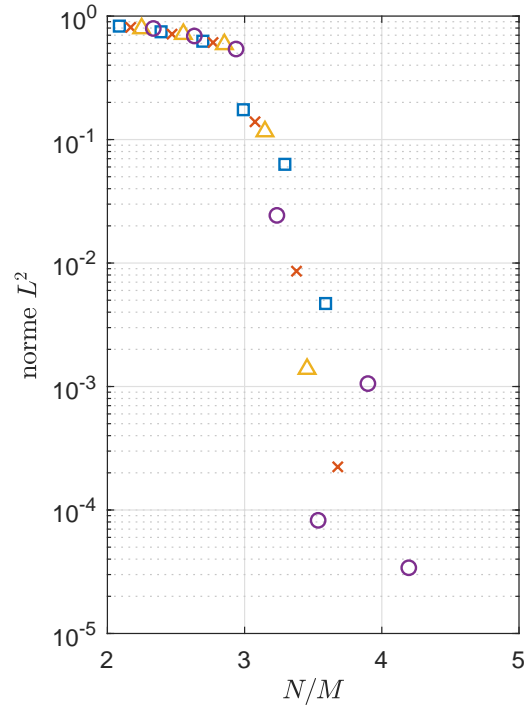
$$L_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1} \quad (2.7)$$

où  $n = 1 \dots N$ .

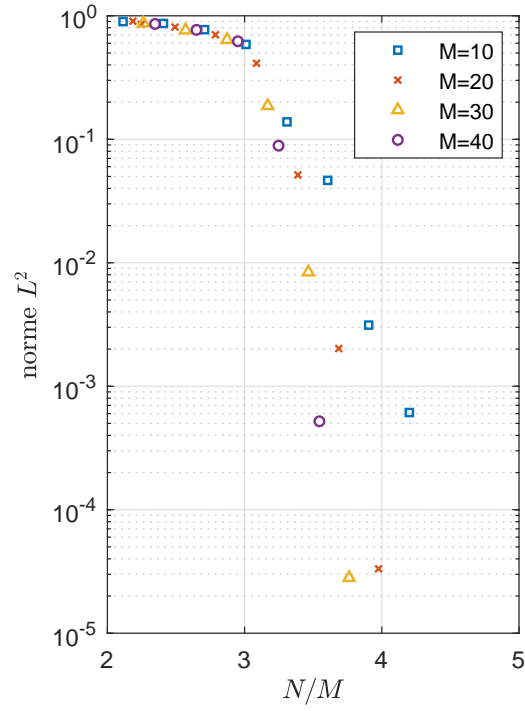
La figure 2.7 montre d'où la méthode spectrale tire son nom. Les interpolants utilisés par la méthode spectrale possèdent des convergences qui ressemblent à celles des séries de sinus de Fourier. Le terme «spectral» provient du domaine lexical des ondes. Ce qui est intéressant à retenir est que la convergence de polynômes dits spectraux est d'ordre beaucoup plus élevé que celles des interpolant de Lagrange avec des Points de Collocation Équidistants (PCE).

Pour la première fois, on observe les éléments finis spectraux tels qu'ils sont aujourd'hui. Le domaine de calcul d'une équation différentielle est discrétisé en éléments où l'interpolant est un polynôme de Lagrange de degré élevé qui utilise les points de collocations de Chebyshev. Patera applique cette méthode aux équations de Navier-Stokes (Patera, 1984).

De bons ouvrages décrivent la méthode des éléments finis spectraux (Karniadakis et Sherwin, 2013; Pozrikidis, 2005). Ils traitent des éléments choisis, des interpolants et des bases polynomiales, des quadratures, des discrétisations et l'assemblage et la construction des maillages en vue d'un calcul.



(a) Erreur en norme  $L^2$  de  $\sin(M\pi x)$  tronqué en  $N$  termes de la série de Chebyshev



(b) Erreur en norme  $L^2$  de  $\sin(M\pi x)$  tronqué en  $N$  termes de la série de Legendre

Figure 2.7 Convergence de développement en série (Gottlieb et Orszag, 1977)

## CHAPITRE 3 Éléments de référence simplexe

### 3.1 Résolution d'une équation par la méthode des éléments finis

La résolution d'une équation par MEF requiert dans un premier temps de choisir une équation qui représente le phénomène physique. Aux fins d'exemple, l'équation de la conduction de la chaleur sera utilisée :

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Méthode de Ritz

La méthode de Ritz cherche à approcher la solution d'une équation différentielle par des fonctions d'interpolation définies sur tout le domaine de calcul.

On multiplie l'équation à résoudre par un ensemble de fonctions tests,  $\Phi$  :

$$-\Phi \nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (3.2)$$

Cette opération a pour but de créer un nombre d'équations égal au nombre de degrés de liberté de la variable primaire. Pour ce faire, les fonctions  $\Phi$  doivent être uniques. Leur unicité rend la résolution possible.

On pose alors l'intégrale :

$$\int_{\Omega} -\Phi \nabla \cdot (k\nabla T) d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

où  $\Omega$  est le domaine de calcul.

Le théorème de la divergence est appliqué pour obtenir des termes de flux définis sur  $\Gamma$ , le bord du domaine :

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot k\nabla T d\Omega - \oint_{\Gamma} \Phi k\nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (3.4)$$

La variable primaire est discrétisée sous la forme d'une somme de fonctions d'interpolation :

$$T \approx T^N = \sum_{j=1}^N a_j \Psi_j \quad (3.5)$$

où  $N$  est le nombre de degrés de liberté et  $a_j \in \mathbb{R}$  sont des constantes.

### 3.1.2 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin impose de prendre les fonctions  $\Psi_i$  pour construire  $\Phi$ .

Ce choix ajoute que les fonctions choisies reflètent les propriétés de la variable primaire, c'est-à-dire que les fonctions se trouvent dans le même espace ou que leur espace inclut celui de la variable primaire ou encore qu'elles sont dérivables ou discontinues.

Le résultat sur (3.4) est :

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi_i \cdot k \nabla \left( \sum_{j=1}^N a_j \Psi_j \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \Psi_i k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

On réarrange pour obtenir :

$$\sum_{j=1}^N a_j \left( \int_{\Omega} \nabla \Psi_i \cdot k \nabla \Psi_j d\Omega \right) - \int_{\Gamma} \Psi_i k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad \forall \quad i = 1 \dots N \quad (3.7)$$

On peut alors poser :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \Psi_i \cdot k \nabla \Psi_j d\Omega \quad (3.8)$$

et

$$B_i = \int_{\Gamma} \Psi_i k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.9)$$

et résoudre pour  $a$  :

$$\mathbf{A}a = \mathbf{B}. \quad (3.10)$$

Si les fonctions  $\Psi$  sont construites à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange,  $l_j$ , alors aux points de collocation  $x_i$  :

$$\Psi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall \quad i = 1 \dots N \quad \text{et} \quad a_j = T_j. \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Méthode des éléments finis

La MEF se différencie de la méthode de Ritz par la discrétisation du domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. Elle présente un gain substantiel dans la mesure où le domaine géométrique est complexe.

On dénote alors par les indices supérieurs  $(^e)$  et  $(^{eb})$  les éléments et les éléments de bords

respectivement :

$$\sum_e^{nElm} \int_{\Omega^e} \nabla \Phi_i^e k \nabla T^e d\Omega^e - \sum_{eb}^{nElmB} \int_{\Gamma^{eb}} \Phi_i^{eb} k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma^{eb} = 0 \quad \forall \quad i = 1 \dots N \quad (3.12)$$

Cette méthode est plus difficile à implémenter que la méthode de Ritz et de Galerkin. Elle nécessite un système de numérotation entre le maillage global et celui de l'élément. Les interpolations et les quadratures sont alors définies sur un élément de référence sur lequel sont transformés les éléments géométriques. La matrice jacobienne de la transformation est alors requise pour les quadratures élémentaires.

Les méthodes de maillage, de numérotation, de connectivité ou d'obtention de la matrice jacobienne ou de son déterminant ne seront pas traitées ici.

### 3.2 Construction des éléments spectraux en dimension 1

Cette section décrit la démarche pour construire les polynômes d'interpolation, les points d'interpolation d'un élément spectral en dimension 1 et une quadrature. En dimension 1, tous les éléments sont des segments de droite.

La MEF requiert des polynômes d'interpolation pour approcher la solution aux équations posées. Les Éléments Finis Spectraux (EFS) cherchent à reproduire la convergence spectral de la figure 2.7 en choisissant adéquatement les points de collocations des polynômes d'interpolation.

#### 3.2.1 Polynômes d'interpolation en dimension 1

Pour l'équation choisie et pour respecter les propriétés de la variable primaire  $T$ , les fonctions d'interpolation doivent être continues. Elles doivent être des polynômes d'interpolation de Lagrange. Elles sont symétriques et possèdent des points de collocation aux bords de l'élément<sup>1</sup>. Elles sont aussi dérivables un nombre approprié de fois<sup>2</sup>.

Les polynômes de Lagrange en dimension un sont définis de façon usuelle par le produit de monômes :

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.13)$$

---

1. Ceci est nécessaire pour qu'il y ait transmission d'informations entre les différents éléments lors de la résolution du système, c'est-à-dire que des éléments voisins doivent avoir des nœuds communs.

2. Ce nombre est choisi tel que la dérivée n-ième est non triviale.

et donc l'interpolation d'une fonction  $f$  devient :

$$L(X) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(X) \equiv \Pi(f) \quad (3.14)$$

Pour que les éléments  $n$ -simplexes soient utilisables, des polynômes d'interpolation dans la dimension  $n$  appropriée doivent être définis. Dans les sections suivantes, les étapes de construction de ces polynômes en dimension 1, 2 et 3 sont présentées.

### 3.2.2 Constante de Lebesgue

Les points de collocations sont importants dans la mesure où ils influencent la qualité de l'interpolation, notamment le phénomène de Runge. Pour mesurer leur qualité, la constante de Lebesgue est utilisée. Cette constante borne l'erreur d'interpolation. La constante est définie par :

$$\Lambda_n = \max_{x \in \Omega} \lambda_n(x) \quad \text{où} \quad \lambda_n(x) = \sum_{j=0}^n |l_j(X)| \quad (3.15)$$

où  $\Lambda$  est la constante de Lebesgue,  $X$  est un ensemble de points sur le domaine,  $n$  est le degré de l'interpolation et  $\Omega$  est le domaine.

On peut démontrer que le terme d'erreur sur une interpolation de Lagrange est de la forme :

$$|f(X) - \Pi(f)| \leq (\Lambda_n + 1) \|f - P_n\| \quad (3.16)$$

où  $P$  est la meilleure approximation de degré  $n$  de  $f$ .

### 3.2.3 Distribution de points en dimension 1

Nous avons envisagé plusieurs distributions de points comme ensemble de points de collocation dont :

1. équadistants ;
2. sinusoïdales ;
3. et les racines des dérivées des polynômes de Legendre auxquels on ajoute les bords du domaine, c'est-à-dire les points de Lobatto ;
4. et des points dont la position est optimisée.

En dimension 1, la solution triviale d'une distribution de points sont des points équadistants. Par contre, cette solution ne présente pas de convergence spectrale et ne limite pas le phénomène de Runge.



En dimension 1, nous avons vu que les polynômes avec des PCE ne sont pas optimaux, c'est-à-dire que le phénomène de Runge est très important et la convergence n'est pas spectrale. Pour obtenir de meilleurs points de collocation, un problème de minimisation de la constante de Lebesgue peut être formulé. Il est aussi possible de minimiser la somme de la norme  $L^2$  des polynômes d'interpolation. Cette méthode est viable, car cette norme diminue avec la constante de Lebesgue et a l'avantage d'être dérivable<sup>3</sup>, ce qui permet de bien poser un problème de minimisation pour trouver les points optimaux avec des solveurs qui utilisent les dérivées. Ces méthodes plus traditionnelles ont le désavantage de retourner des minimums locaux. Puisque la constante de Lebesgue n'est pas dérivable, il est préférable d'utiliser des techniques de minimisation globale sans dérivées telles qu'un algorithme de recuit simulé ou un algorithme génétique.

Il est possible d'obtenir des ensembles de points par l'optimisation des points de collocation pour minimiser la norme  $L^2$  des polynômes d'interpolation (Chen et Babuška, 1995). La constante de Lebesgue des ensembles sont aussi montrés à la figure 3.1. Les ensembles optimisés présentent peu de gains les uns par rapport aux autres. Le choix entre eux revient à faire un compromis entre la difficulté d'obtention, la rapidité et la précision de la solution. Ces ensembles n'ont pas été retenus, car ils sont difficiles à calculer et présentent seulement un gain marginal par rapport aux autres ensembles de points spectraux.

Portons maintenant notre analyse sur les points de l'ensemble sinusoïdal et de Lobatto. D'une part nous rappelons que l'ensemble sinusoïdal est défini comme une distribution entre -1 et 1 :

$$s_i = \cos(t_i) \quad (3.17)$$

où  $t_i$  est un des points équidistants dans  $[-\pi, 0]$  et  $s_i$  le point transformé. D'autre part, l'ensemble de Lobatto est défini comme les zéros des dérivées des polynômes de Legendre.

**Définition 7.** Soit les *polynômes de Legendre*, les solutions de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.18)$$

où  $P_n$  sont les polynômes de Legendre.

---

3. Dans la constante de Lebesgue, l'opérateur **max** n'est pas dérivable.

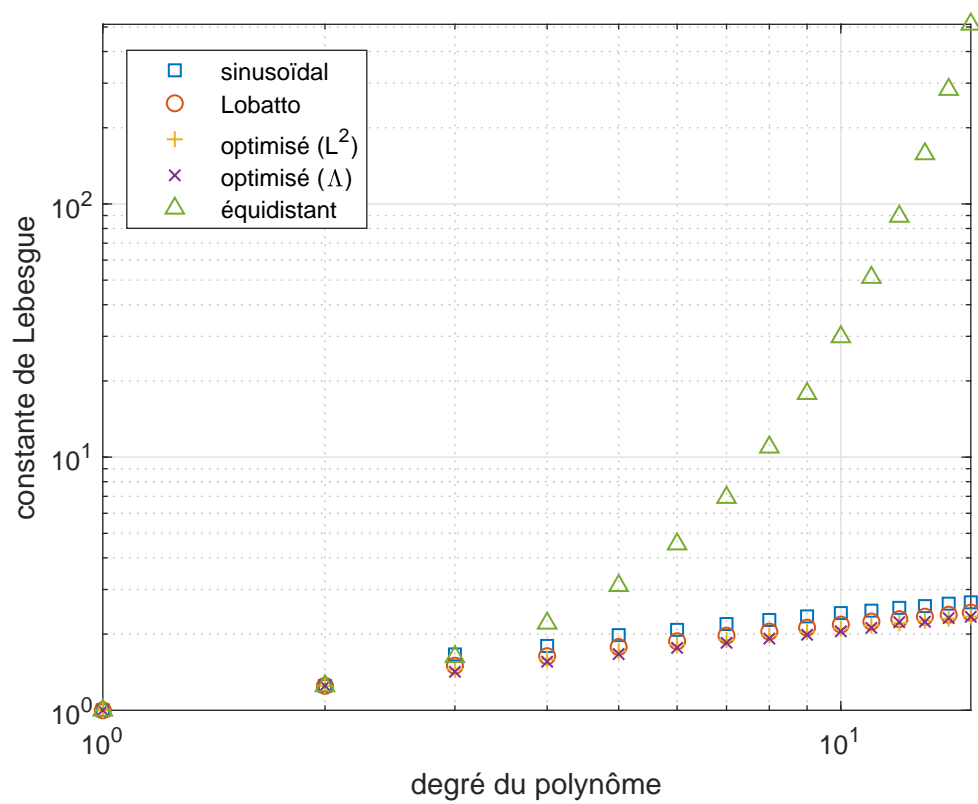


Figure 3.1 Constante de Lebesgue de différents ensembles de points en dimension 1

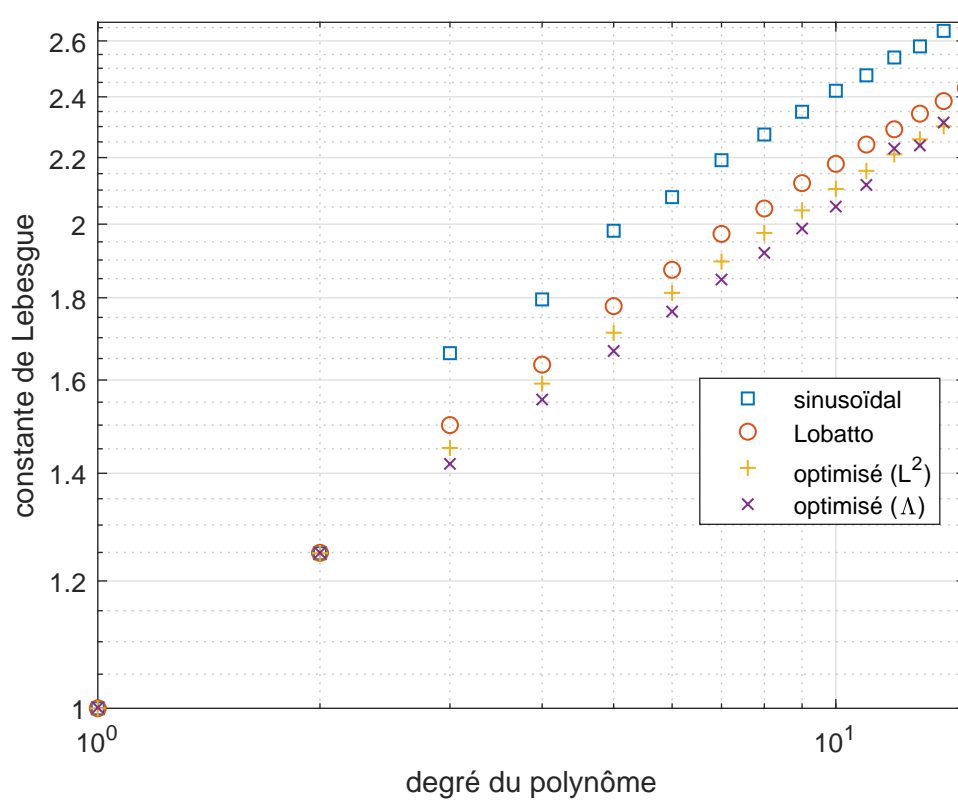
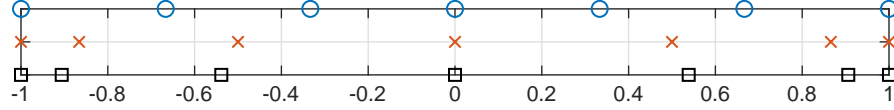


Figure 3.2 Constante de Lebesgue de différents ensembles de points en dimension 1



○ sont les points équidistants, × sont les points sinusoidaux et □ sont les zéros des polynômes de Legendre

Figure 3.3 Exemple des points équidistants, sinusoidaux et de Legendre pour  $n=6$

Les premiers polynômes de Legendre,

$$P_0 = 1 \quad (3.19)$$

$$P_1 = x \quad (3.20)$$

$$P_2 = (3x^2 - 1)/2 \quad (3.21)$$

$$P_3 = (5x^3 - 3x)/2 \quad (3.22)$$

sont faciles à obtenir avec la formule de récurrence de Bonnet,

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (3.23)$$

Comme le montre la figure 3.3 et la figure 3.2, il y a peu de différences entre la distribution des points optimaux et les points de l'ensemble sinusoidal.

Cette disposition est conforme avec les résultats du problème de Tammes (1930). Tammes théorise que certaines dispositions apparaissent naturellement comme solution à une distribution uniforme sur une sphère. Il est intéressant que cette solution provienne de biomimétisme. Les figures 3.4 et 3.5 montrent des solutions au problème de Tammes.

Fekete généralise ce problème en dimension supérieure. (Fekete, 1923; Saff et Kuijlaars, 1997; Smale, 1998). Le problème de Fekete consiste à disposer des points sur une  $n$ -sphère. Ces points se repoussent avec une force proportionnelle à la distance aux autres points. Les forces sont transmises seulement sur la surface de la  $n$ -sphère. La formulation originale du problème est restreinte à une 2-sphère. Il tente de minimiser l'énergie énoncée de deux façons. Soit la  $s$ -énergie :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \|x_i - x_j\|^{-s}, \text{ si } s > 0, \quad (3.24)$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \log \|x_i - x_j\|^{-1}, \text{ sinon.} \quad (3.25)$$

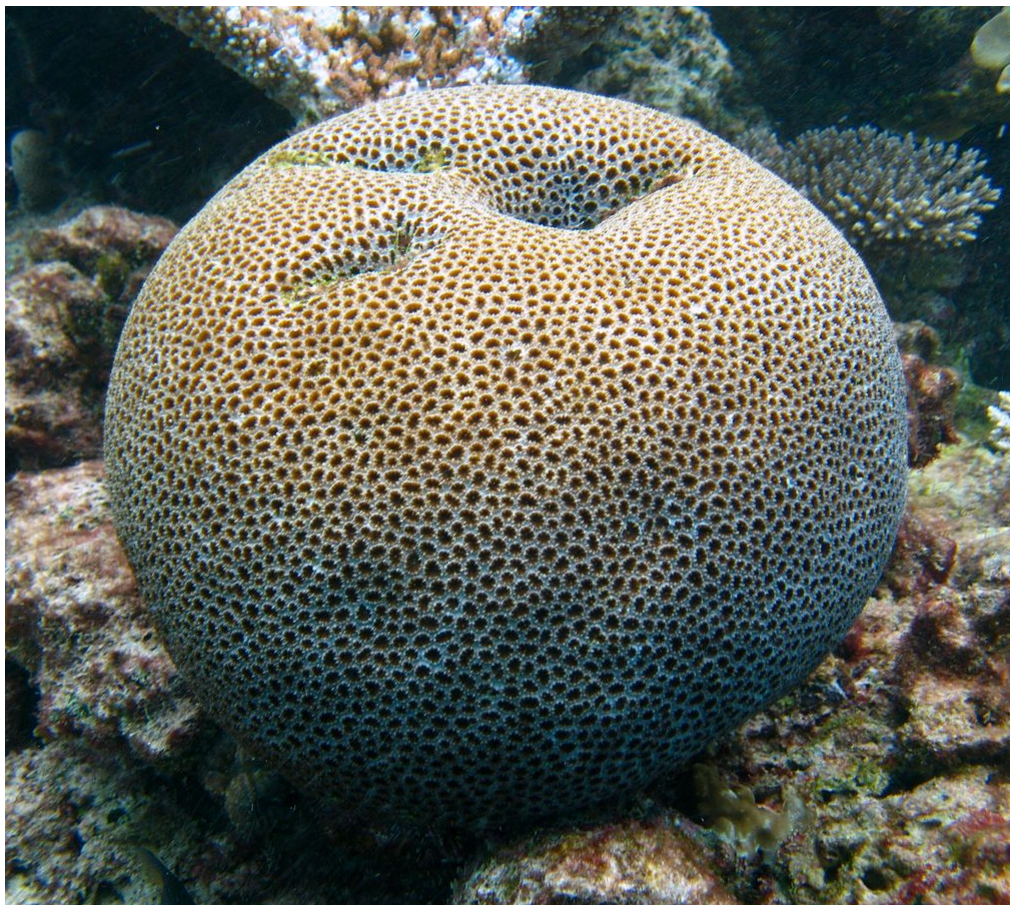


Figure 3.4 Corail montrant une approximation du problème de Tammes d'une distribution uniforme sur une sphère (Hudson, 2010)

Les solutions proposées utilisent la même logique appliquée sur une portion de sphère projetée sur la forme de l'élément désiré ou une approximation de cette distribution. La démarche de Fekete n'est pas directement applicable puisqu'une demi-sphère ne peut être transformée facilement en triangle par exemple. Une telle transformation est non-triviale.

Notons que ce problème est intimement lié à un problème d'empilement compact aussi connu sous le nom d'arrangement compact (Tammes, 1930; Fekete, 1923).

### 3.2.4 Quadrature en dimension 1

Une quadrature se veut une méthode numérique pour approximer la valeur d'une intégrale. Elles sont généralement exprimées sous la forme :

$$I = \int_{\Omega} f(x) d\Omega \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (3.26)$$

où  $I$  est la valeur de l'intégrale sur le domaine  $\Omega$ ,  $f$  est la fonction intégrande,  $x_i$  sont les positions d'évaluation de la fonction et  $w_i$  est la pondération donnée à ces évaluations.

La méthode des trapèzes est un exemple. Certaines de ces quadratures sont dites exactes pour des polynômes donnés. Par exemple, la méthode des trapèzes est exacte pour des intégrandes linéaires. La figure 3.6 montre cette intégration. Une quadrature qui utilise des polynômes pour construire les poids et les positions peuvent être exactes. Un exemple est la quadrature de Gauss-Legendre en dimension 1 qui est exacte pour des polynômes jusqu'à  $2n - 1$ . Il existe des manières numériques et analytiques d'obtenir les points et leur poids.

Connaissant les points, un système algébrique est construit pour trouver les poids :

$$V \mathbf{w} = \int_{\Omega} g_i(\mathbf{x}) \quad (3.27)$$

$\forall i$  et où  $g_i$  sont des fonctions dont l'intégrale est connue sur le domaine et  $V$  est la matrice de Vandermonde construite avec  $x_i$  et  $g_i$ .

Dans le cas où ce système est résolu numériquement, les coordonnées  $x_i$  et les fonctions  $g_i$  sont choisies pour minimiser le conditionnement de la matrice. Il est possible de résoudre ce système de façon analytique. Le cas le plus simple est de choisir les interpolants de Lagrange comme  $g_i$  et ses nœuds  $x_i$  pour que  $V$  soit la matrice identité. Les poids sont alors la valeur de l'intégrale des interpolants de Lagrange sur le domaine choisi. De façon analytique, la matrice  $V$  avec les polynômes d'interpolation de Lagrange est la matrice identité, donc les poids sont les intégrales de ces polynômes. Tant que l'on possède un interpolant de Lagrange sur un domaine, il est alors possible de déterminer les poids d'une quadrature. Ceci est vrai

en dimension supérieure. La seule difficulté restante est de choisir un bon ensemble de points. En dimension 1, les quadratures de Gauss-Legendre ou Gauss-Lobatto sont appropriées. Par exemple, la quadrature de Gauss-Legendre est basée sur les polynômes de Legendre.

Des méthodes plus avancées existent pour obtenir numériquement les nœuds et les poids. Il est démontré qu'ils peuvent être obtenus avec la méthode de Golub-Welsch (Golub et Welsch, 1969; Gozman).

Connaissant la formule de récurrence d'un polynôme orthonormal à une seule variable  $P_n(x)$ ,

$$P_n(x) = (a_n x + b_n)P_{n-1} - c_n P_{n-2} \quad (3.28)$$

on construit la matrice tridiagonale avec

$$\alpha_i = -b_i/a_i \quad (3.29)$$

sur la diagonale principale et

$$\beta = \left( \frac{c_{i+1}}{a_i a_{i+1}} \right)^{0.5} \quad (3.30)$$

sur les diagonales  $+1$  et  $-1$ . Cette matrice est ici nommée matrice de Jacobi,  $J$ .

Les valeurs propres de la matrice  $J$  sont les nœuds de la quadrature et la première composante des vecteurs propres sont les poids.

Il est à noter que la norme utilisée pour déterminer qu'un polynôme est orthogonal est :

$$\int_{\Omega} P_i(x) P_j(x) dx = 0 \quad \forall \quad i \neq j \quad (3.31)$$

### 3.2.5 Distributions des points en dimension 2

En dimensions 2, il y a une solution triviale pour l'ensemble de points, ce sont des points sur une grille équidistante. Encore une fois, plusieurs ensembles sont connus. La grille équidistante et les points générés sur une grille issue des zéros des polynômes de Lobatto sont montrés sur la figure 3.7. Une difficulté supplémentaire survient en dimension 2 : la géométrie de l'élément doit être choisie. Les quadrangles et les triangles sont les plus communs, cependant d'autres polygones sont possibles. Un maillage n'est pas non plus limité à l'usage d'un seul type d'élément.

Sur des triangles, les points de l'ensemble incluent les sommets. Les bords reflètent un ensemble de points en dimension 1. Les points à l'intérieur sont choisis pour minimiser la constante de Lebesgue. Encore une fois, puisque la constante de Lebesgue est difficile à opti-

miser, on la remplace par une norme qui la représente. Les choix communs sont la norme  $L^2$ ,  $L^p$ ,  $L^\infty$  ou le déterminant de la matrice de Vandermonde formé par les polynômes de bases définis sur le domaine évalué aux points de collocation tel que montré au tableau 3.1.

La solution la plus simple revient à appliquer une grille sur le triangle. Cette solution est montrée sur la figure 3.8. Par contre, la constante de Lebesgue croît rapidement et l'effet de Runge devient apparent (Bos, 1983). La première version est celle d'une grille de points équidistants.

Il est possible d'améliorer cette solution avec une grille obtenue par le produit tensoriel des points de Lobatto, c'est-à-dire

$$\xi_{ij} = (\xi_i, \xi_j) \text{ pour } \xi_i \text{ les points de Lobatto.} \quad (3.32)$$

Un des premiers bons ensembles de points optimisés est celui obtenu par Chen et Babuška (1995). Il consiste à minimiser la norme  $L^2$ . Cet ensemble donne de bons résultats. Par contre, ces points sont difficiles à obtenir pour des polynômes de degrés élevés. Leur description originale donne des résultats jusqu'au degré 13. Ils sont également meilleurs que la minimisation du déterminant de la matrice de Vandermonde sans plus de difficulté (Chen et Babuška, 1995).

Il est possible d'améliorer cet ensemble en les utilisant comme point de départ pour minimiser directement la constante de Lebesgue avec une méthode de minimisation sans dérivée. Par contre, le gain est marginal.

Il existe également des approximations de ces points. Leur constante de Lebesgue est plus élevée, mais leur calcul est direct. Il est donc possible de les obtenir sans optimisation et pour des degrés plus grands que 13. Pour des degrés plus grands que 13, leur usage comporte généralement beaucoup d'erreur. Par contre, ces points sont un très bon point de départ pour trouver des points qui optimisent la valeur des différentes normes (Blyth et Pozrikidis, 2005).

La logique derrière ces points est une moyenne de la rotation des points obtenus par la grille de Lobatto. Ceci est fait de manière à obtenir une distribution de points trisymétriques.

Tableau 3.1 Matrice de Vandermonde

$P_0(x_0)$	$P_0(x_1)$	...	$P_0(x_{n-1})$	$P_0(x_n)$
$P_1(x_0)$	...	...	...	...
...	...	...	...	...
$P_{n-1}(x_0)$	...	...	...	$P_{n-1}(x_n)$
$P_n(x_0)$	...	...	$P_n(x_{n-1})$	$P_n(x_n)$





Figure 3.5 Alvéoles d'abeilles montrant une approximation du problème de Tammes d'une distribution uniforme sur un plan (Waugsberg, 2017)

Tableau 3.2 Conditionnement donné sur les nœuds donnés sur la figure ??

n	polynômes de Prorior	monômes de Pascal
2	3.57	3.73
3	6.62	31.0
4	11.78	304
5	17.8	3094

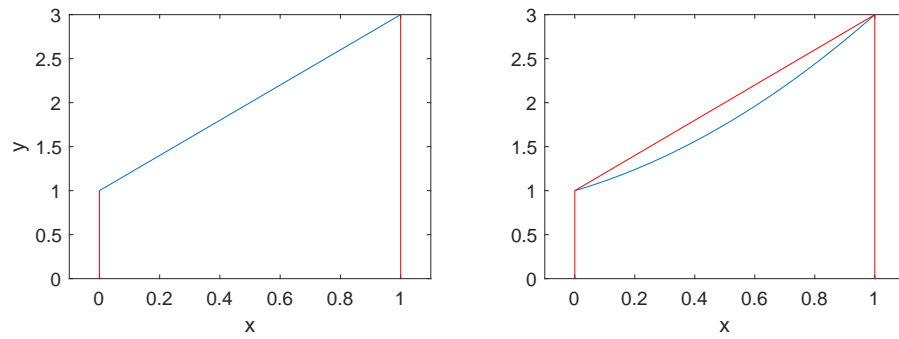


Figure 3.6 La méthode des trapèzes est exacte sur un polynôme de degré 0 ou 1

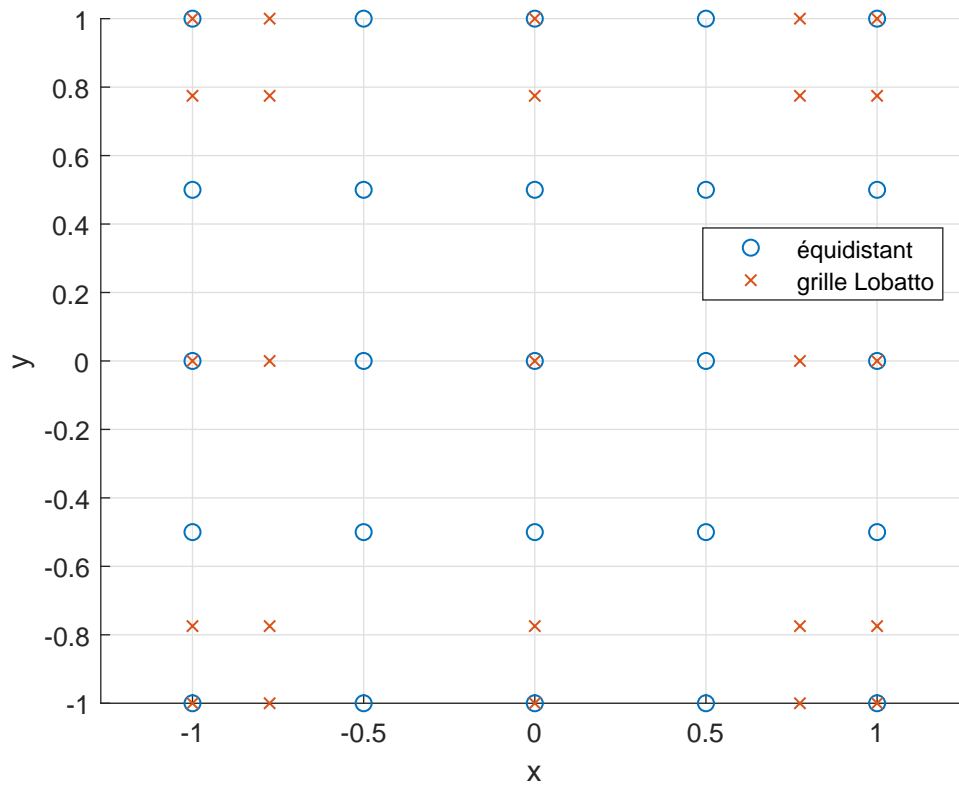
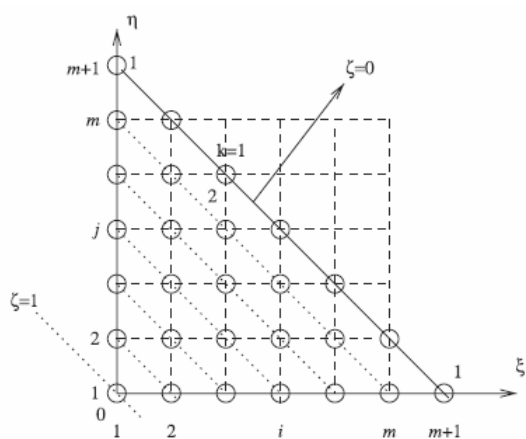
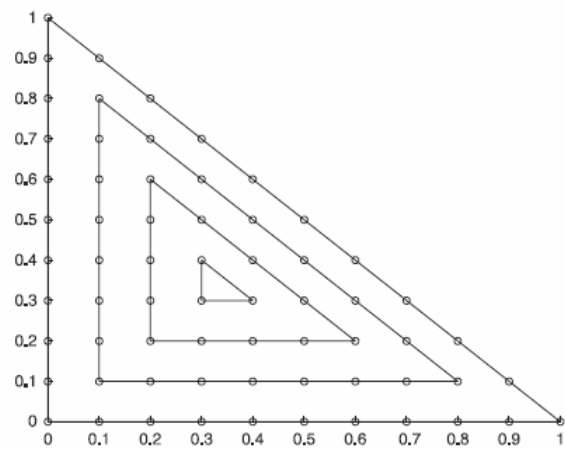


Figure 3.7 Points équidistants et de Legendre pour  $n = 5$  sur un carré

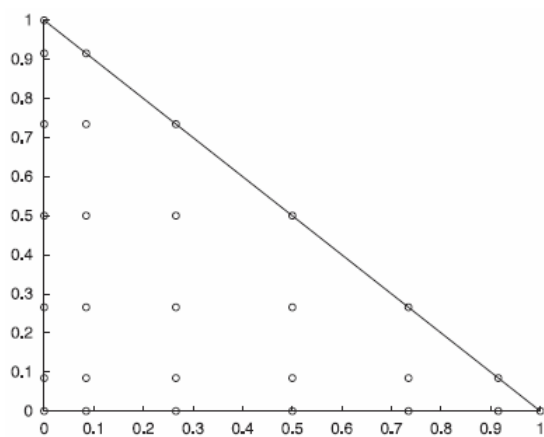
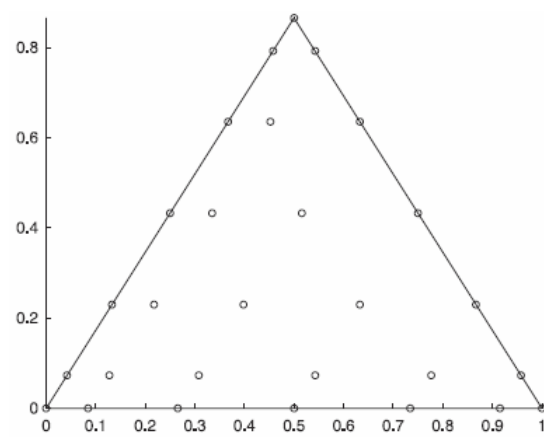


(a) Grille équidistante sur un triangle



(b) Les noeuds se trouvent sur une séquence de triangles concentriques

Figure 3.8 Exemple d'une grille équidistante (Blyth et Pozrikidis, 2005)

(a) Grille de Lobatto pour  $m=6$ 

(b) La même grille sur un triangle équilatéral

Figure 3.9 Exemple d'une grille améliorée avec les zéros des polynômes de Lobatto (Blyth et Pozrikidis, 2005)

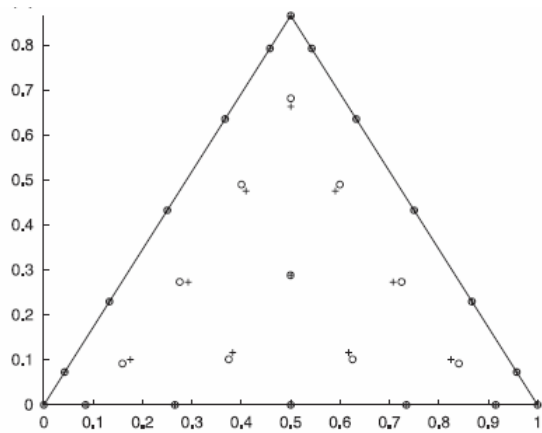
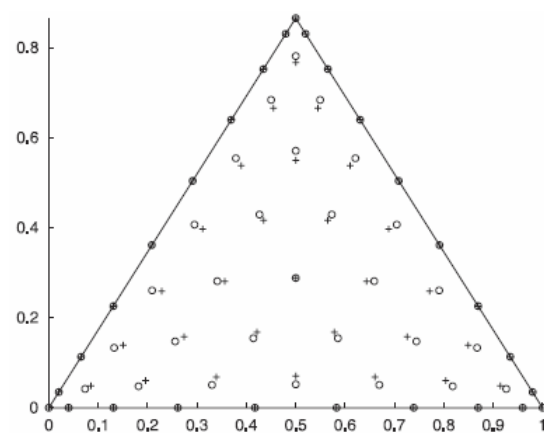
(a)  $m=6$ (b)  $m=9$ 

Figure 3.10 Comparaison des points de Fekete qui minimisent le déterminant de la matrice de Vandermonde (o) et des points du triangle de Lobatto de Blyth (+) (Blyth et Pozrikidis, 2005)

**Approximation de Blyth (Blyth et Pozrikidis, 2005)** Pour construire les points de collocation sur un triangle, nous finalement adoptons la procédure de Blyth et Pozrikidis (2005). Ainsi, on choisit une distributions  $v = \{v_1, \dots, v_m\}$  de points sur un segment de droite. Par exemple, la distribution des points de Lobatto obtenu à la section 3.2.3.

Par la suite, les coordonnées des points  $(\xi_i, \eta_i)$  sur le triangle se calculent par :

$$\xi_i = \eta_j = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_i - v_k) \quad (3.33)$$

pour

$$\begin{aligned} i &= 1 \dots m + 1, \\ j &= 1 \dots m + 2 - i, \\ k &= m + 3 - i - j \end{aligned}$$

sur le triangle de référence de la figure ???. Des exemples de points sont dans les tables de l'annexe D.

Soit  $v_i \quad \forall i = 1 \dots m$  où  $v$  est la distribution désirée le long d'un bord du triangle et  $m$  est le degré de l'interpolation.

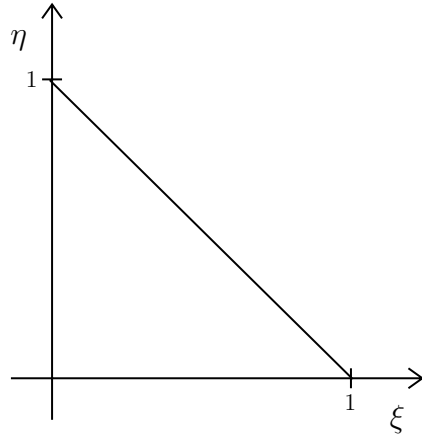


Figure 3.11 Triangle de référence

### 3.2.6 Construction des polynômes d'interpolation en dimension 2

Pour construire les polynômes d'interpolation, un ensemble,  $B$ , de polynômes linéairement indépendants est choisi. Cet ensemble est noté par

$$B = \{p_i(x) \quad \forall i \in 1 \dots m\}. \quad (3.34)$$

Ensuite, les  $m$  polynômes d'interpolation s'obtiennent par la combinaison linéaire des polynômes de  $B$ , c'est-à-dire :

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^m a_{ij} p_j(x) \quad \forall i = 1 \dots m \quad (3.35)$$

avec

$$L_i(x_k) = \delta_{ik} \quad (3.36)$$

et

$$x_k \in X_0 \quad (3.37)$$

où  $X_0$  sont les points de collocation choisis.

Par exemple, pour la fonction d'interpolation  $L_1$ , nous obtenons

$$V \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

et de façon générale pour tous les coefficients de polynôme

$$V a_{ij} = I \quad (3.39)$$

En termes d'implémentation, cela est équivalent à un système d'équations algébrique :

$$V E_{Interpolant}(X) = P(X) \quad (3.40)$$

où  $V$  est la matrice de Vandermonde,  $E_{Interpolant}(X)$  est l'évaluation de l'interpolant en  $X$  et  $P(X)$  est l'évaluation du polynôme de base en  $X$ , c'est-à-dire que :

$$P(X_0) = V. \quad (3.41)$$

Il devient alors évident que si  $X = X_0$  :

$$V^{-1}P(X_0) = V^{-1}V = I \quad (3.42)$$

Cela implique qu'un polynôme d'interpolation vaut 1 à son point de collation et 0 aux autres. Cela met aussi en évidence deux choses. D'abord, il n'est jamais nécessaire de calculer explicitement les coefficients du polynôme puisqu'il est possible de résoudre le système d'équations. S'ils sont nécessaires, ils peuvent être obtenus par l'inversion de  $V$ . Deuxièmement, dans une application telle que les éléments finis où des évaluations des interpolants sont constamment produites, il est pertinent de calculer l'inverse une seule fois puis de réutiliser le résultat.

La dérivée au point d'évaluation est aussi facile à obtenir. Si

$$VE_{\text{Interpolant}}(X) = P(X), \quad (3.43)$$

on note que  $V$  ne dépend pas de  $X$ , alors on peut dériver directement les deux côtés de l'équation pour obtenir :

$$V \frac{dE_{\text{Interpolant}}(X)}{dX} = \frac{dP(X)}{dX} \quad (3.44)$$

Il est à noter que pour que cela soit trivial, les dérivées des polynômes de bases doivent être connues.

La qualité des polynômes de base influence la capacité d'obtenir les polynômes d'interpolation : le système peut être difficile à résoudre. Pour pallier cet effet, le polynôme de base est généralement construit de polynômes qui offrent un meilleur conditionnement.

**Base polynomiale de Proriol (Blyth et Pozrikidis, 2005)** Nous avons sélectionné la base polynomiale de Proriol pour l'ensemble  $B$ , car elle conduit à un système bien conditionné pour calculer l'interpolant (Proriol, 1957). Elle a été choisie parmi les choix suivants : Proriol, Appell, Jacobi, Laguerre, Hermite, Chebyshev, Legendre, etc (Totik, 2005).

La façon d'obtenir une base sur un triangle de référence plutôt que dans un espace général en dimension 2 est d'effectuer la transformation d'un carré de référence sur le triangle de référence.

Si l'espace de référence est donné en fonction de  $(\xi, \eta)$  et que le carré de référence est donné par  $-1 \leq \xi' \leq 1$  et  $-1 \leq \eta' \leq 1$  alors le triangle de référence est obtenu par la transformation de Duffy :

$$\xi = \frac{(1 + \xi')(1 - \eta')}{4}, \eta = \frac{1 + \eta'}{2} \quad (3.45)$$

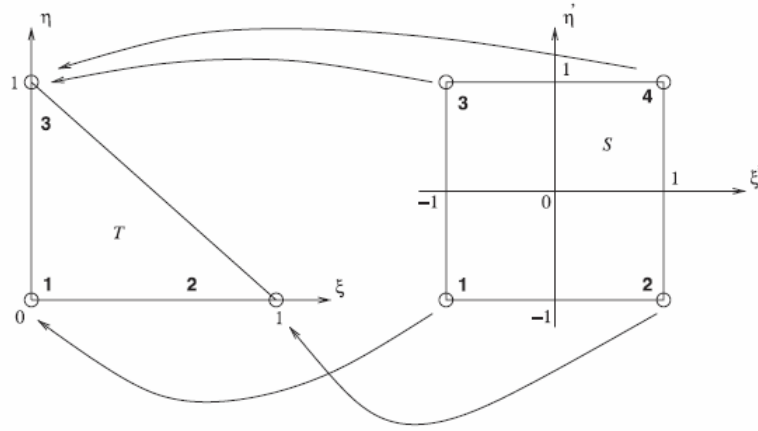


Figure 3.12 Transformation de Duffy (Blyth et Pozrikidis, 2005)

Le polynôme de Proriol est défini par :

$$P_{kl} = L_k(\xi') \left( \frac{1-\eta'}{2} \right)^k J_l^{(2k+1,0)}(\eta') = L_k(\xi')(1-\eta)^k J_l^{(2k+1,0)}(\eta') \quad (3.46)$$

où  $L_k$  est le polynôme de Legendre et  $J_l^{(a,b)}$  est le polynôme de Jacobi.

Pour montrer l'effet de ces différents points de collocation et comment ils se comparent à des éléments quadrangle, une plaque carrée a été discrétisée avec un élément quadrangle puis avec deux triangles. Ces éléments sont montrés à la figure 3.13. On compare le conditionnement de la matrice masse. Le résultat est montré à la figure ??.

Notons qu'il n'est pas possible de comparer directement les conditionnements d'une forme à l'autre. Les éléments quadrangles possèdent la distribution de points optimale sur le carré alors que ce n'est pas le cas des triangles. Il est possible que les triangles performant mieux sur des géométries complexes. Ceci est proposé par intuition. Il serait pertinent de le valider.

### 3.2.7 Distribution des points en dimension 3

Un processus similaire est applicable aux tétraèdres (Luo et Pozrikidis, 2006). L'ensemble de points est obtenu en appliquant un ensemble de points connus sur un triangle aux faces du tétraèdre. Les points centraux sont choisis tels qu'ils minimisent la constante de Lebesgue, la norme  $L^2$ , sinon une approximation de ces points est utilisée.



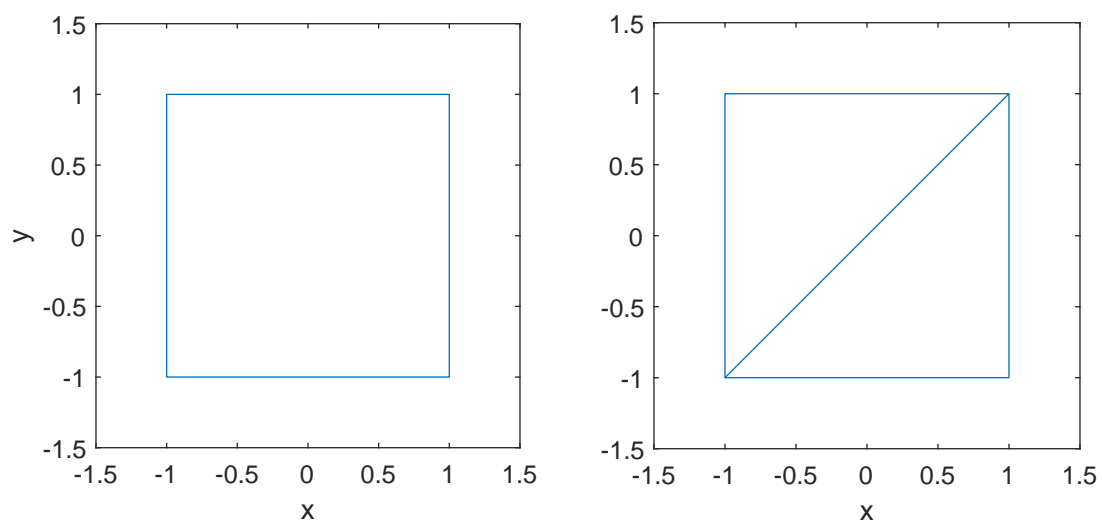
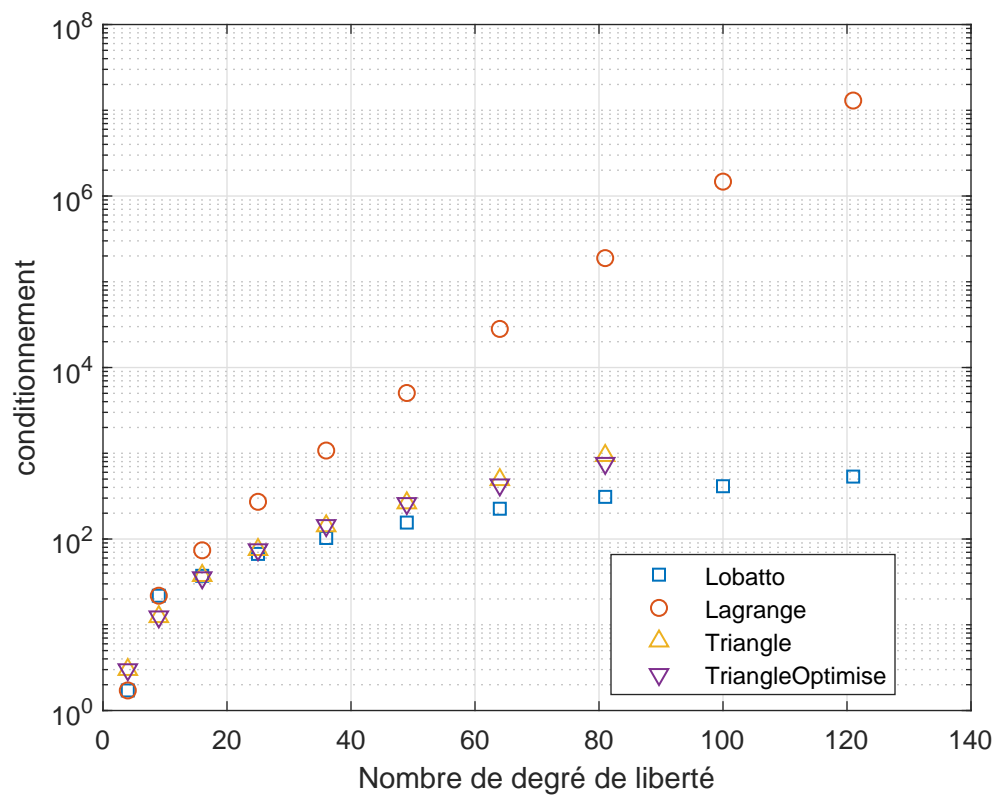


Figure 3.13 Discrétisation du carré



Soient  $\square$  le conditionnement induit par les points de Lobatto sur le quadrangle,  $\circ$  les points de Lagrange sur le quadrangle,  $\Delta$  par l'approximation de Blyth sur le triangle et  $\nabla$  les points qui optimisent la norme  $L_2$  sur le triangle.

Figure 3.14 Conditionnement de la matrice masse

**Approximation des points de Luo (Luo et Pozrikidis, 2006)** Pour obtenir les points de collocation d'un simplexe en dimension 3, nous utilisons l'approximation de Luo. Cette méthode est analogue à celle de Blyth et Pozrikidis (2005) pour la dimension 3.

On débute par calculer les coordonnées sur les faces du tétraèdre de la figure D

Sur la face  $\xi\eta$

$$\xi = \frac{1}{3}(1 + 2v_i - v_j - v_l), \quad (3.47)$$

$$\eta = \frac{1}{3}(1 - v_i + 2v_j - v_l), \quad (3.48)$$

$$\zeta = 0 \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \text{pour } i &= 1 \dots m + 1, \\ j &= 1 \dots m + 2 - i, \\ l &= m + 3 - i - j. \end{aligned}$$

Sur la face  $\eta\zeta$

$$\xi = 0, \quad (3.50)$$

$$\eta = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_k - v_l), \quad (3.51)$$

$$\zeta = \frac{1}{3}(1 - v_j + 2v_k - v_l) \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \text{pour } j &= 1 \dots m, \\ k &= 2 \dots m + 2 - j, \\ l &= m + 3 - j - k. \end{aligned}$$

Sur la face  $\zeta\xi$

$$\xi = \frac{1}{3}(1 + 2v_i - v_k - v_l), \quad (3.53)$$

$$\eta = 0, \quad (3.54)$$

$$\zeta = \frac{1}{3}(1 - v_i + 2v_k - v_l) \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
\text{pour } i &= 2 \dots m, \\
k &= 1 \dots m + 2 - i, \\
l &= m + 3 - i - k
\end{aligned}$$

Sur la dernière face

$$\xi = \frac{1}{3}(1 + 2v_i - v_j - v_l), \quad (3.56)$$

$$\eta = \frac{1}{3}(1 - v_i + 2v_j - v_l), \quad (3.57)$$

$$\zeta = 1 - \xi - \eta \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
\text{pour } i &= 2 \dots m, \\
j &= 2 \dots m + 1 - i, \\
l &= m + 3 - i - j
\end{aligned}$$

Les points à l'intérieur

$$\xi = \frac{1}{4}(1 + 3v_i - v_j - v_k - v_l), \quad (3.59)$$

$$\eta = \frac{1}{4}(1 - v_i + 3v_j - v_k - v_l), \quad (3.60)$$

$$\zeta = \frac{1}{4}(1 - v_i - v_j + 3v_k - v_l) \quad (3.61)$$

$$(3.62)$$

$$\begin{aligned}
\text{pour } i &= 2 \dots m, \\
j &= 2 \dots m + 1 - i, \\
k &= 2 \dots m + 2 - i - j, \\
l &= m + 4 - i - j - k
\end{aligned}$$

Des exemples sont montrés dans l'annexe E.



ou moins. Il est également possible d'utiliser des quadratures de Hammer en dimension 3 (Hammer et Stroud, 1956).

Sachant que

$$L_n(x) = J_n^{\alpha=0, \beta=0}(x) \quad (3.67)$$

avec  $L$ , le polynôme de Legendre,  $J$ , le polynôme de Jacobi,  $n$ , le degré du polynôme,  $\alpha$  et  $\beta$ , les paramètres du polynôme de Jacobi, une quadrature de Gauss-Legendre n'est qu'un cas particulier d'une quadrature de la quadrature de Gauss-Jacobi.

Ainsi, la quadrature de von Winckel est l'application répétée de la quadrature de Gauss-Jacobi où le paramètre  $\alpha$  varie de 1 à  $k$  (la dimensions). Il construit, pour chaque paramètre, la matrice de la quadrature selon Golub et Welsch (1969). Les poids sont alors la première composante des vecteurs propres et les coordonnées dans une dimension de chaque étape sont les valeurs propres. Il est notable que les poids obtenus sont tous positifs.

Dans le cas spécifique des équations de Naviers-Stokes, si le polynôme choisi pour approximer la vitesse et la pression sont respectivement de degrés  $n$  et  $n - 1$ , alors les équations sont au plus de degré  $3n - 1$ . La quadrature de von Winckel requise pour que la quadrature soit exacte requiert que  $(3n - 1) \leq (2m - 1)$ .

Pour ce qui est des quadratures adaptatives, elles ne sont pas recommandées dans un contexte d'éléments finis, car les poids et les coordonnées sont variables selon les cas et donc ils doivent être recalculés un grand nombre de fois. Dans le cas d'une quadrature fixe, les poids et les positions sont calculés une seule fois sur l'élément de référence.

## CHAPITRE 4 CONCLUSION

### 4.1 Synthèse des travaux

#### 4.1.1 Élément simplexe

Des points de collocation sur un simplexe en dimension 1, 2 et 3 sont présentés. Les limites quant à leur précision et leur coût sont expliqués. La construction approximative plutôt qu'exacte de ces points est suggérée considérant le gain marginal que les points exacts représentent par rapport aux points approximatés. Les points exacts demandent un effort considérable d'optimisation. Des polynômes de Proriot avec lesquels ils sont utilisés sont également présentés pour construire les polyômes d'interpolation. Une quadrature utilisant la méthode de Golub-Welsch et son application répétée pour plusieurs dimensions est aussi présentée. Tous ce qui est nécessaire pour implémenter un élément de référence spectral sur un simplexe est présenté. La qualité de l'élément proposée est également évaluée. La constante de Lebesgue de l'interpolation sur le  $n$ -simplexe est grandement inférieure à une solution naïve et comparable à ce qui est possible sur un élément spectral sur un élément  $n$ -hypercube.

### 4.2 Limitations de la solution proposée

Malgré ces avancements, il est à noter que le système d'équations résultant, pour une simulation au même nombre de degrés de liberté, a un conditionnement plus élevé avec des simplexes qu'avec des hypercubes.

### 4.3 Améliorations futures

Pour gérer la connectivité dans un programme d'éléments finis, il est désirable de connaître l'ordre et la position des points sur l'élément référence. Cet ordre n'est pas explicitement présenté dans ce mémoire. Par contre, il est possible de le déduire des algorithmes de Blyth et celui de Luo.

## Deuxième partie

Solution des équations de Navier  
Stokes dans un repère accéléré en  
rotation en utilisant des éléments  
spectraux



## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Lors de la simulation d'un objet qui se déplace en fonction des efforts générés par un phénomène physique, ici l'écoulement d'un fluide, les efforts et l'écoulement deviennent couplés. De nombreuses stratégies pour la résolution de ce couplage ont été proposées dans le cadre de travaux de recherche. Leur complexité lors de la mise en œuvre est souvent significative. La solution proposée est de modéliser l'écoulement dans le repère de l'objet de manière à ce qu'aucun artifice ne soit nécessaire pour résoudre le problème.

L'intérêt d'une telle simulation réside dans le domaine des Interactions Fluide-Structure (IFS). Lorsque ce genre d'interactions se produit sur de grands mouvements de l'objet étudié, il devient nécessaire que la simulation tienne en compte des changements. Plusieurs solutions existent pour résoudre ce problème, par exemple, l'usage de force fictive sur l'objet ou d'un maillage mobile. Par contre, ces solutions impliquent souvent le remaillage au moins partiel du domaine de calcul ou une gestion supplémentaire pour détecter la nouvelle position de l'objet étudié. Nous utilisons une formulation non inertielle de sorte qu'aucun changement majeur à la méthode n'est alors nécessaire. Les équations de Navier-Stokes non inertielles requièrent la simulation des termes conventionnels d'accélération sous une autre forme que celles conventionnelles pour rester valides.

La problématique consiste à mettre en œuvre une formulation non inertielle (repère accéléré en rotation) pour les équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire que :

1. les résultats qualitatifs concordent avec des méthodes précédemment validées ;
2. l'erreur obtenue sur un problème donné est acceptable ;
3. la simulation est complétée dans un temps raisonnable.

Pour ce faire, une formulation est développée et mise en œuvre dans le cadre d'un programme d'EFS. Elle est ensuite utilisée pour reproduire un problème connu. La réponse validée est comparée et il est attendu qu'elle soit similaire, stable et convergée.

La physique que l'on a choisie de modéliser est l'écoulement d'un fluide représenté par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Des simulations sont présentées à un nombre de Reynolds de 1000.

## 1.1 Définitions et concepts de base

Dans la présente étude, la dynamique de l'écoulement est modélisé par l'équation de Navier-Stokes incompressible dans un référentiel non inertiel. Elle est dérivée comme un cas particulier de l'équation de quantité de mouvement de Cauchy. De façon générale, nous notons par  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $p$  la pression,  $\mu$  la viscosité et  $F$  une force volumique appliquée au fluide pour un fluide newtonien.

### 1.1.1 Référentiel non inertiel

Dans un référentiel non inertiel l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) + \rho \mathbf{F} - \rho \left( 2\dot{\theta} \times \mathbf{u} + \dot{\theta} \times \dot{\theta} \times \mathbf{x} + \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \ddot{\theta} \times \mathbf{x} \right) \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse de translation linéaire du référentiel non inertiel par rapport à l'origine du repère inertiel,  $\mathbf{u}$  est la vitesse dans le repère non inertiel,  $\theta$  est la position angulaire par rapport à l'origine et  $\mathbf{x}$  est la coordonnée d'un point dans le référentiel non inertiel.

Dans cette équation, les contraintes visqueuses sont décrites par :

$$\tau \equiv \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (1.2)$$

Dans le cas étudié, l'objet est en rotation pure alors le terme  $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = 0$ .

Ayant ajouté une variable,  $\theta$ , une équation supplémentaire est nécessaire pour la résolution. On choisit une équation qui décrit les efforts qui déplacent l'objet : l'équation de conservation du moment angulaire

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + \kappa\theta = - \oint_{\Gamma} r \times (\tau \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (1.3)$$

où  $I$  est le moment d'inertie de l'objet,  $C$  est la constante d'amortissement,  $\kappa$  est le coefficient de torsion et  $\Gamma$  est le bord de l'objet. Ces efforts sont montrés à la figure 1.1.

C'est ce groupe d'équations qui sera résolu. Elles traduisent les équations de Navier-Stokes dans un repère non inertiel où les efforts sur un objet induisent la rotation.

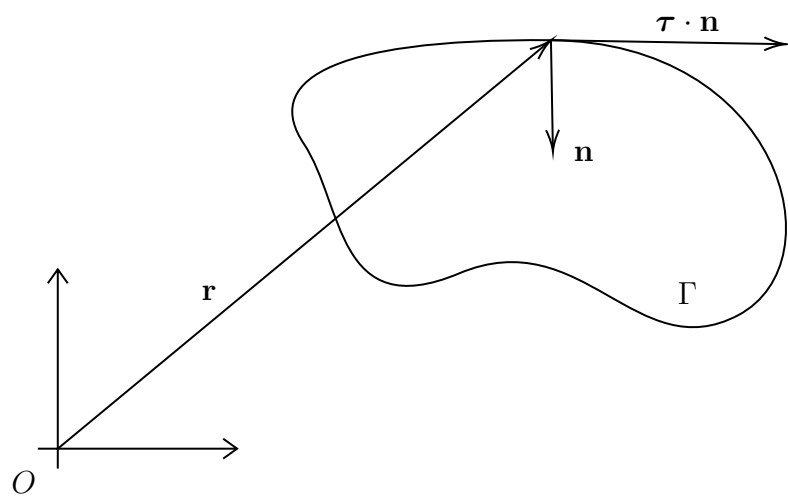


Figure 1.1 Effort sur l'objet en rotation autour du centre  $O \forall x \in \Gamma$

## 1.2 Éléments de la problématique

La problématique consiste à intégrer de manière implicite les équations (1.2) et (1.3) par le biais de la condition de non glissement (ou d'adhérence) du fluide à la surface du solide en rotation. On cherche à éviter le calcul direct des efforts ( $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ )

## 1.3 Objectifs de recherche

Les objectifs de la recherche sont :

1. **écrire** une formulation variationnelle monolitique en repère accéléré pour résoudre de manière couplée et implicite les équations de Navier-Stokes et de la dynamique du solide ;
2. **implémenter** ces équations ;
3. **valider** les résultats par une étude comparative ;
4. **écrire** une formulation adimensionnelle des équations de Navier-Stokes en repère non inertielle.

### 1.3.1 Objectifs détaillés

La formulation faible des équations de Navier-Stokes en repère non inertiel est présentée pour éviter de remailler les frontières de l'objet en rotation. Cette formulation doit inclure les équations de Navier-Stokes modifiées, des conditions représentant les efforts sur l'objet et des conditions limites adaptées au changement dynamique de l'entrée et la sortie du domaine de calcul.

Les variables adimensionnelles permettent de caractériser l'écoulement. Dans le domaine de validité des équations, elles permettent de déterminer si des problèmes étudiés sont identiques. Elles sont pertinentes lors de l'utilisation des équations pour éviter de répéter des problèmes simplement à des échelles différentes.

Les équations obtenues sont ensuite utilisées pour reproduire une simulation effectuée par Weymouth (2014). Ceci est fait pour valider le bien-fondé des équations. Cette comparaison est surtout qualitative entre autres sur les traces obtenues décrivant le mouvement de l'objet dans le fluide.

## 1.4 Plan de la partie II

Pour atteindre ces objectifs, cette partie est divisé en 5 chapitres. Le chapitre 2 est une revue de la littérature qui traite du développement des formes faibles non inertielles des équations de Navier-Stokes.

Au chapitre 3, nous discutons de la transformation des équations de Navier-Stokes vers la forme non inertielle, de son intérêt et des variables adimensionnelles associées. On traite aussi des particularités des conditions limites de ces équations.

Le chapitre 4 introduit la méthodologie pour la validation de la formulation faible obtenue, les différents calculs réalisés sur une géométrie en dimension 2 à des nombres de Reynolds de 1000 et les résultats obtenus.

Au chapitre 5, la conclusion, nous présentons une synthèse des travaux de cette partie. Nous identifions les limites de la contribution.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

### 2.1 Référentiels non inertiels

Kageyama a développé une formulation des équations de Navier-Stokes incompressible dans un référentiel non inertielle. Ils traitent de la résolution d'équations issues de la géophysique dans des référentiels non inertiels (Kageyama et Hyodo, 2006).

Roohani explique comment l'historique de l'écoulement influence les simulations. Il traite d'écoulements fortement accélérés dans un fluide compressible. Il conclut que les cas stationnaire et transitoire sont significativement différents. Le cas transitoire reflète souvent des caractéristiques des vitesses précédentes (Roohani et Skews, 2008). Le phénomène est assimilable à l'hystérésis. La figure 2.1 illustre ce phénomène.

Ce développement explique que les termes d'accélération lors de la modélisation ne sont pas négligeables. La modélisation stationnaire n'est donc pas applicable dans les simulations où l'accélération a un effet significatif sur la physique étudiée.

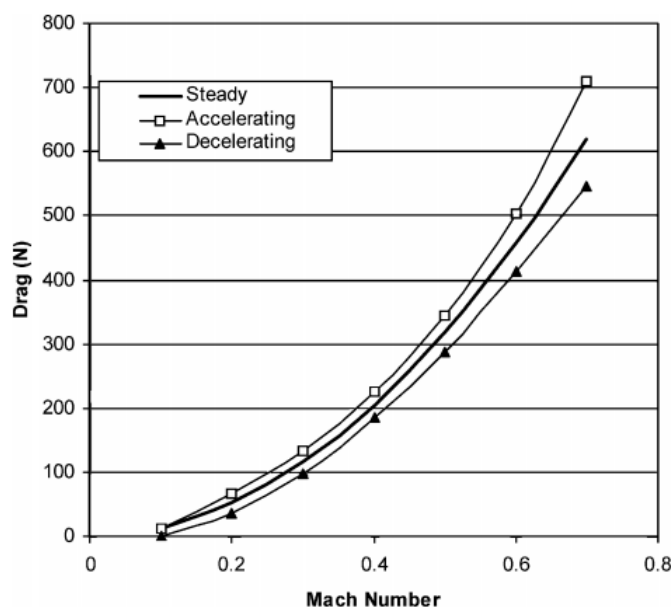


Figure 2.1 Effet d'hystérésis sur des simulations avec de grandes accélérations (Roohani et Skews, 2008)

Gledhill se base sur les travaux de Batchelor, Greenspan et Kageyama pour appliquer le même traitement aux équations de Navier-Stokes pour des applications aérobalistiques (Batchelor,

1967; Greenspan, 1968; Kageyama et Hyodo, 2006). Il se limite à des termes de vitesses angulaires constants. Les applications ciblées incluent donc des nombres de Reynolds relativement élevés et donc de la turbulence, phénomène qui présente déjà des difficultés lors de la résolution des équations de Navier-Stokes (Gledhill et al., 2016).

Gledhill obtient l'équation suivante pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} - \tau] = -\rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \rho \dot{\mathbf{r}} + \rho \mathbf{g} \quad (2.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $v$  est la vitesse,  $p$  est la pression,  $\tau$  sont les contraintes visqueuses,  $\boldsymbol{\omega}$  la vitesse angulaire,  $\mathbf{x}$  est la position du référentiel,  $\dot{\mathbf{r}}$  est l'accélération du repère et  $\otimes$  est le produit tensoriel.

Combrinck et Dala ont généralisé la procédure de Kageyama pour des termes de vitesses angulaires variables. Ils traitent aussi des équations de Navier-Stokes compressibles. Ils arrivent à une formulation similaire à celle de Gledhill (Combrinck et Dala, 2014; Combrinck et al., 2015, 2017).

Weymouth présente une étude d'une ellipse en rotation pure dont le mouvement est excité par un écoulement à bas nombre de Reynolds ( $O(10^3)$ ). Ces études sont celles utilisées pour vérifier les résultats obtenus ici. Il utilise la méthode *Boundary Data Immersion Method* et des volumes finis. Son approximation de la convection est du troisième ordre et la diffusion du second ordre. Son schéma d'intégration temporelle est la formulation explicite de Heun du second ordre avec un pas de temps adaptatif pour maintenir la stabilité du problème. L'objet étudié est une ellipse de ratio 2 : 1 dans un maillage de rayon 20 fois le plus petit demi-axe de l'ellipse (Weymouth, 2014). La figure 2.2 donne un aperçu des simulations conduites par Weymouth. On observe dans sa simulation des structures similaires aux allées de von Kármán.

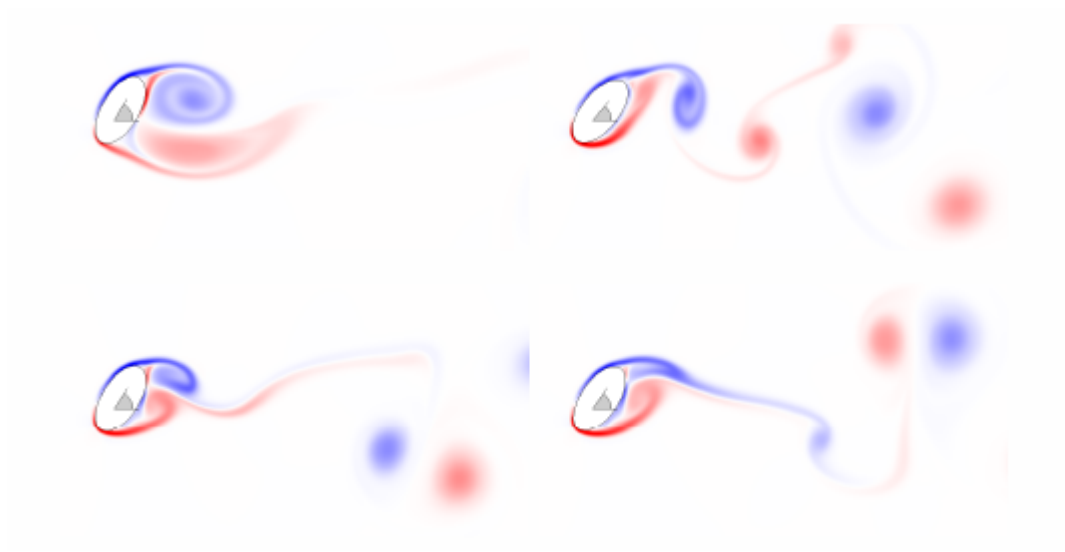


Figure 2.2 Structures tourbillonnaires générées par une ellipse dans un écoulement à un nombre de Reynolds de 1000 (Weymouth, 2014)



## CHAPITRE 3 Équations de Navier-Stokes dans un référentiel non inertiel

### 3.1 Référentiels inertiels et non inertiels

Les référentiels communément utilisés sont inertiels, c'est-à-dire qu'ils sont considérés non accélérés dans l'espace. Cependant, ceux-ci sont inadéquats pour décrire la physique d'un objet en mouvement accéléré.

#### 3.1.1 Alternatives

Pour modéliser l'objet et l'écoulement en mouvement, le modèle peut superposer l'objet au maillage de l'espace de calcul avec des conditions particulières. Cette approche est entre autres utilisée dans le logiciel STAR-CCM+ (STAR-CD User Guide, 2004; Steger et al., 1983). Le principe est que deux maillages sont superposés. Le grand maillage de fond est lié, par exemple, aux équations qui décrivent la vitesse des fluides et le second, avec des mailles plus petites, est lié aux forces appliquées sur l'objet en mouvement. Les équations sont alors couplées pour obtenir le système désiré. C'est également la méthode que Weymouth (2014) utilise. Ce processus comprend un désavantage majeur : la taille du maillage de fond peut devenir ingérable pour des vitesses très grandes de l'objet (Gledhill et al., 2016). Ces vitesses seraient de l'ordre de grandeur du domaine de médélisation par pas de temps. Il est possible d'utiliser cette méthode en faisant un compromis entre l'erreur de discrétisation et la taille du problème à résoudre.

Le module Fluent d'Ansys utilise une autre stratégie. L'objet est conservé comme étant immobile dans le maillage et un terme d'accélération est imposé sur le domaine et les frontières. Cette stratégie est valide pour des rotations à vitesse constante, cependant les termes d'accélération pour des vitesses variables ne sont pas inclus dans Fluent. Ils peuvent cependant être ajoutés manuellement (Fluent Ansys, 2010; Gledhill et al., 2016).

Il est aussi possible de remailler à toutes les étapes de temps pour tenir compte du mouvement de l'objet. Cette méthode demande un nombre excessif d'opérations et ne peut être utilisé que pour des problèmes à basse vitesse. Cette méthode revient à poser un maillage mobile pour représenter l'objet et le fluide.

### 3.1.2 Approche choisie

Les référentiels non inertiels sont avantageux pour suivre l'objet dans son mouvement. Cela implique que le maillage est fixe dans le référentiel, réduisant significativement le besoin de remailler ou de gérer des formulations de surmaillage et des conditions particulières ou encore d'éviter que l'objet sorte de la zone de calcul. Un exemple, qui est exploré ici, est un référentiel accéléré avec l'objet qui est en pure rotation. L'équation choisie pour modéliser la physique tient alors compte des accélérations de Coriolis, Euler et centrifuge. Cette méthode requière un domaine virtuellement infini et des conditions limites particulières.

Les conditions limites sont modifiées pour tenir compte de la rotation. Les limites attendues d'une telle méthode sont des erreurs grandissantes loin du centre de rotation. Le nombre de Reynolds définit les caractéristiques de l'écoulement et il détermine la plage de validité du calcul. De plus, il est possible que la vitesse relative soit très élevée loin de l'objet en rotation requérant la stabilisation de l'accélération convective que nous ne traitons pas. L'équation utilisée est incompressible. Puisque nous utilisons le modèle newtonien d'un fluide incompressible, le nombre de Mach doit être sous la borne appropriée pour le fluide. Par exemple, si le fluide est de l'air le nombre de Mach doit être inférieur à 0.3. Le modèle est aussi limité à des simulations sans cavitation. Ainsi, nous considérons le modèle suivant.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}] = -\rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \rho \dot{\mathbf{r}} + \rho \mathbf{g} \quad (3.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mathbf{v}$  est la vitesse,  $p$  est la pression,  $\boldsymbol{\tau}$  sont les contraintes,  $\boldsymbol{\omega}$  est la vitesse angulaire,  $\mathbf{x}$  est la position du référentiel,  $\dot{\mathbf{r}}$  est l'accélération du repère et  $\otimes$  est le produit tensoriel.

Il s'agit des équations de Navier-Stokes écrites dans un référentiel en rotation. L'utilisation d'un référentiel inertiel dans ce cas forcerait le choix d'une méthode de compensation : une déformation de maillage, l'addition ou le retrait d'éléments ou encore une superposition d'un objet sur le maillage qui requiert une équation de détection des bords et une équation supplémentaire pour les efforts. Pour éviter ces difficultés, un référentiel non inertiel ou accéléré est utilisé. Les équations sont modifiées en conséquence. Cette méthode comporte des limites quant au fait que la sortie se déplace dans l'espace et que la vitesse loin du centre de rotation est amplifiée par la rotation et affecte possiblement la stabilité du problème.

**Définition 8.** Soit  $R_0(\mathcal{O}, \mathbf{e}_i; \mathbf{x}, \mathbf{u})$  et  $R_1(\mathcal{O}, \mathbf{E}_i(t); \mathbf{X}, \mathbf{U})$ , respectivement le référentiel **inertiel** et **non inertiel**, avec  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{U}$  les vitesses du fluide. L'origine est la même dans les deux référentiels puisque le mouvement est en rotation. La base des coordonnées est modi-

fiée de  $\{\mathbf{e}_i\}$  vers  $\{\mathbf{E}_i\}$  pour tenir compte de la rotation. Le même principe est appliqué à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{u}$  vers  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{U}$  respectivement. On définit  $\mathbf{u}_c = \dot{\mathbf{x}}_c$ . L'accélération est définie comme étant  $\dot{\mathbf{u}}_c = \ddot{\mathbf{x}}_c$ . De plus, l'angle de rotation, la vitesse angulaire, l'accélération angulaire et la direction tangente sont définis comme étant  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\dot{\omega}$  et  $\mathbf{l}$ .

La relation usuelle entre la cinématique et la dynamique des référentiels inertiels vers les référentiels accélérés est

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \omega \mathbf{l} \times \mathbf{x} \quad (3.2)$$

et

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + 2\rho\omega \mathbf{l} \times \mathbf{U} + \rho \frac{d\omega}{dt} \mathbf{l} \times \mathbf{X} - \frac{\rho}{2} \nabla |\omega \mathbf{l} \times \mathbf{X}|^2 \quad (3.3)$$

Les nouveaux termes sont la force de Coriolis, la force d'Euler et la force centrifuge.

Notez que le terme de force centrifuge est habituellement de la forme  $\rho\omega^2 \mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{X})$ . Ce terme est équivalent à  $\rho/2 * \nabla |\omega \mathbf{l} \times \mathbf{X}|^2$  (Batchelor, 1967).

### 3.2 Formulations faibles modifiées

Dans cette section, le modèle décrit le comportement d'un objet immergé attaché par un axe entraîné par un courant de fluide. Le comportement de l'objet est décrit par l'équation de conservation du moment angulaire :

$$I\dot{\omega} + \Gamma\omega + \mu\theta = T \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.5)$$

où  $I$  est le second moment d'inertie,  $\Gamma$  est la constante de friction rotationnelle,  $\mu$  est la constante de torsion et  $T$  est ici le moment.

### 3.3 Conditions limites

#### 3.3.1 Condition limite des équations de la dynamique du solide

Le couplage des équations de Navier-Stokes et de la dynamique du solide se fait en reliant ces équations par un multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur impose l'adhérence des vitesses à la paroi du solide en mouvement où les vitesses sont nulles dans le cas de conditions limites sans glissement :

$$\int_{\Gamma} \lambda_u u \, d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_{\Gamma} \lambda_v v \, d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange,  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse.

Ceci implique pour  $u$  que :

$$\int_{\Gamma} \delta \lambda_u u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_u \delta u \, d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

Dans les équations Navier-Stokes, le multiplicateur correspond au cisaillement pariétal :

$$\tau \cdot \mathbf{n} = (\lambda_u, \lambda_v) \quad (3.9)$$

### Dirichlet

Dans un premier temps, des conditions de Dirichlet sont imposées à tous les bords du domaine et des conditions limites sans glissement sont imposées sur l'ellipse. Les conditions de Dirichlet sont modifiées pour tenir compte de la rotation du système. Les conditions de Dirichlet dans un problème en dimension 2 prennent la forme :

$$u = z_i \quad (3.10)$$

$$v = z_j \quad (3.11)$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes du vecteur vitesse et  $z \in \mathbb{R}$  est la valeur de la condition Dirichlet dans le référentiel inertiel.

Pour tenir compte de la rotation du système, on écrit :

$$u = z_i \cos \theta + z_j \sin \theta \quad (3.12)$$

$$v = z_i \sin \theta + z_j \cos \theta \quad (3.13)$$

De telles conditions demandent un grand domaine pour éviter que les bords n'aient un effet sur la simulation. Le domaine doit être suffisamment grand pour permettre aux tourbillons de se dissiper avant la sortie. La taille du domaine dépend alors du nombre de Reynolds. Pour éviter cette situation, des conditions libres sont utilisées.

### 3.3.2 Conditions d'entrée et conditions de sortie libres et dissipatives

Une difficulté avec les conditions de Dirichlet sur tout le bord du domaine est la taille du domaine requis. D'usage, des conditions de Dirichlet en entrée et une condition libre en sortie sont utilisées. Étant donné la forme du domaine et le problème étudié, la sortie peut se déplacer. Pour remédier à ce phénomène, un multiplicateur est introduit sur les conditions limites. Si  $c_0$  et  $c_1$  sont deux conditions limites et  $\lambda$  une fonction de transition entre 0 et 1, les conditions sont appliquées comme suit :

$$c_0(1 - \lambda) + c_1\lambda = \tau \quad (3.14)$$

où  $\lambda = 0$  quand on désire  $c_0$  et  $\lambda = 1$  quand on désire  $c_1$ .  $\lambda$  varie comme une fonction logistique en fonction de  $\theta$ .

$$\lambda(\theta) = \frac{1}{1 + ae^{-r(\theta - \theta_0)}} \quad (3.15)$$

où  $\theta_0$  est le point de transition de la fonction.

Dans les simulations, la solution est instable quand cette condition est imposée et que sa transition se trouve dans le milieu d'un élément. Le maillage près des bords a été raffiné pour limiter ce phénomène avec succès.

Si la sortie est suffisamment éloignée de l'objet, les perturbations que l'objet crée se dissipent. Cette distance dépend du nombre de Reynolds de la simulation. Le sillage est alors complètement inclus dans le domaine de calcul. Alors le problème peut être modélisé avec  $c_0$ , une condition de Dirichlet, et  $c_1$ , une condition libre. Il est à noter que si les structures tourbillonnaires possèdent suffisamment d'énergie au moment de passer la condition limite de sortie, il peut y avoir réinsertion d'énergie dans le système. Ceci cause des pics de pression et rend le problème instable. Si le sillage étudié sort du domaine de calcul, la condition de sortie choisie est celle proposée par Dong et al. (2014). Elle est expliquée et intégrée dans le présent contexte par Raux (2017).

C'est une condition de sortie dissipative sous la forme :

$$S(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \delta) = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\delta} \right) \quad (3.16)$$

C'est une approximation différentiable de la fonction de Heaviside, c'est-à-dire qu'elle permet la traction lorsque l'écoulement sort du domaine, mais elle permet la dissipation de l'énergie lorsque l'écoulement rentre dans le domaine. Dong et Raux traitent de sa valeur et de sa

validité.

### 3.4 Mise sans dimension

#### 3.4.1 Équations de Navier-Stokes

La longueur de l'ellipse et la vitesse de l'écoulement (uniforme et constante) en amont de l'objet définissent  $L_0$  et  $U_0$  les grandeurs caractéristiques du problème. Puisque nous négligeons la gravité, ces grandeurs suffisent pour écrire la formulation adimensionnelle de l'équation 3.3. Nous obtenons :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} \quad (3.17)$$

avec  $Re = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu}$ .

#### 3.4.2 Équation de mouvement

Le couplage des efforts sur un objet et des équations de dynamique des fluides nécessite aussi l'équation du mouvement. Elle est présentée ici sous forme sans dimension.

$$\dot{\omega} + 2\zeta\omega + \theta = T \quad (3.18)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.19)$$

où  $2\zeta = \frac{\Gamma}{\sqrt{I\mu}}$  et  $T$  est le couple appliqué à l'objet.

Le coefficient d'amortissement  $\zeta$  est couramment utilisé pour décrire le comportement d'un système soumis à un effort notamment dans des applications en vibration.

## CHAPITRE 4 Simulations et résultats numériques

### 4.1 Méthodologie

#### 4.1.1 Maillages

Les maillages utilisés ont été générés à l'aide de Gmsh 2.8.5<sup>1</sup>. L'objet est défini comme étant une ellipse. Son ratio est de 2 : 1.

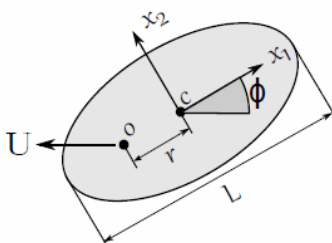


Figure 4.1 Description de l'objet simulé (Weymouth, 2014)

L'objet se trouve dans un domaine circulaire de rayon  $20L$ .

#### 4.1.2 Programme d'éléments finis

EF6 est le programme d'EFS utilisé pour résoudre le problème d'éléments finis. Les équations ne sont pas stabilisées et le problème s'inscrit dans le cadre d'une simulation numérique directe. Il est développé à l'interne dans l'équipe du LADYF<sup>2</sup>.

#### 4.1.3 Schéma de discrétisation temporelle

Les schémas d'intégration temporelle sont de type différences finies arrière implicite d'ordre 2 et 3, aussi connu sous le nom anglais *backward difference formulas* ou BDF.

---

1. <http://gmsh.info/>

2. Laboratoire de dynamique des fluides

## 4.2 Conception de l'expérimentation

### 4.2.1 Liste des tests

Des résultats de Weymouth ont été reproduits pour vérification et validation (Weymouth, 2014). Le cas qu'il présente est une ellipse dans un écoulement incompressible à un nombre de Reynolds de 1000. L'ellipse peut être décentrée pour générer des réponses uniques reconnaissables. Les distances de l'origine choisies sont un ratio de la demi-corde de 0, 0.16, 0.18 et 0.5 vers l'abscisse négative.

Le degré des polynômes est varié de 6 à 8 pour valider si les simulations ont convergé vers l'erreur prescrite.

Différents maillages sont testés : des maillages plus fins près de l'ellipse, plus grands ou encore raffinés.

## 4.3 Résultats

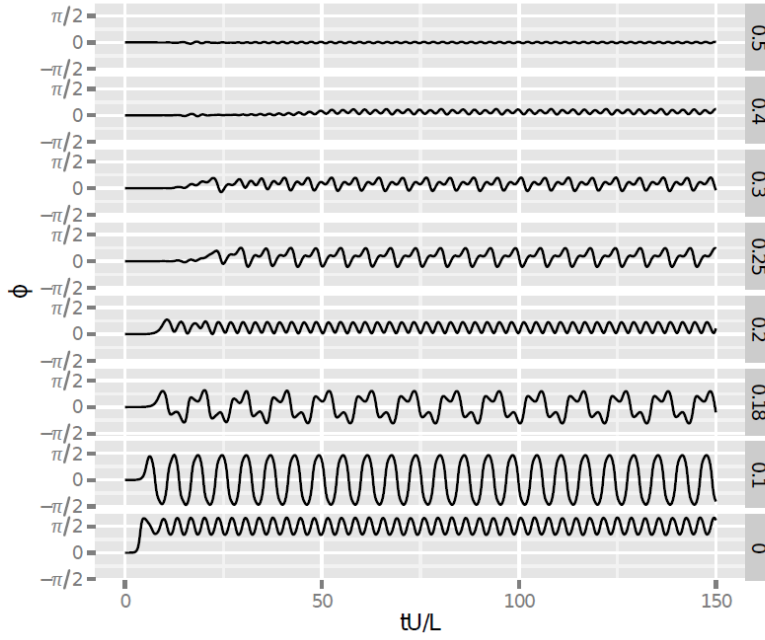
Les diagrammes de réponse concordent avec les résultats attendus. Pour des conditions de Dirichlet en entrée et en sortie, les courbes de pression et de vitesse sont continues et ne comportent pas d'anomalies. Par contre, la condition libre en sortie cause des entrées de matière et cause un pic de pression là où une structure tourbillonnaire passe la frontière. Ceci peut être évité en prenant un domaine suffisamment grand qui laisse la structure se dissiper suffisamment (Dong et al., 2014). Une condition libre modifiée est envisageable et a été utilisée.

Le diagramme de densité spectrale de puissance (DSP) montre l'intensité d'un signal en fréquence. Ce diagramme est obtenu avec une transformée de Fourier sur le déplacement en rotation  $\theta$ . Un exemple peut être vu à la figure 4.5. Il est également à noter que nous utilisons  $\theta$  pour le déplacement angulaire alors que Weymouth utilise  $\phi$  tel que sur la figure 4.2a

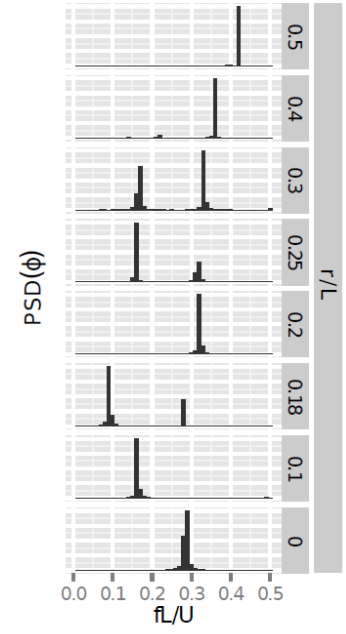
### 4.3.1 Résultats pour $r/L = 0$

La figure 4.3 montre la réponse temporelle de plusieurs variables qui peuvent être comparées à la figure 4.2a. Notamment la variable  $\theta$  qui oscille autour de la valeur  $\pi/2$  tel qu'attendu. Aussi, la figure 4.4 montre une trace consistante à ce qu'on attendait tel qu'à la figure 4.2c. De plus, les fréquences de réponses obtenue et attendue sont monophasiques et similaires tel que montré aux figures 4.5 et 4.2b. Par contre, les valeurs de fréquence sont légèrement différentes. La valeur obtenue est juste sous 0.2 et celle attendue est juste sous 0.3. On peut

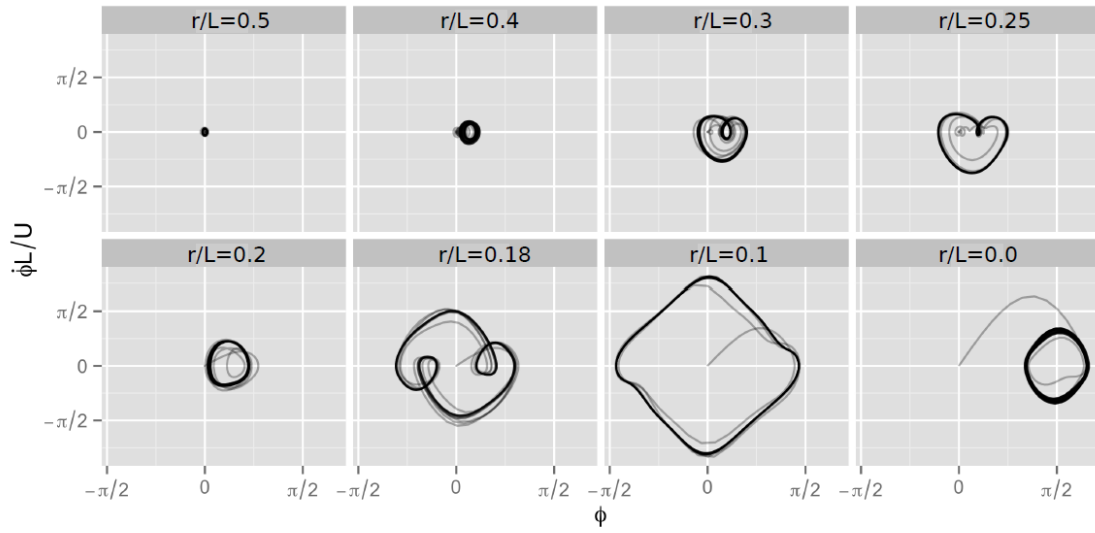




(a) Déplacement angulaire pour différents décentrages



(b) Fréquences des réponses



(c) Diagramme de phase

Figure 4.2 Réponse de référence (Weymouth, 2014)

donc confirmer que dans ce cas les résultats sont reproduits de façon acceptable.

#### 4.3.2 Résultats pour $r/L = 0.16$

La figure 4.6 montre la réponse temporelle de plusieurs variables. La figure 4.7 montre une trace consistante à ce qu'on attendait. De plus, les fréquences de réponses obtenues et attendues sont à la figure 4.8. Weymouth décrit cette simulation comme étant chaotique. On peut donc confirmer que dans ce cas les résultats sont reproduits de façon acceptable.

#### 4.3.3 Résultats pour $r/L = 0.18$

La figure 4.9 montre la réponse temporelle de plusieurs variables qui sont comparées à la figure 4.2a. Notamment la variable  $\theta$  qui reproduit le même motif que celui attendu. Aussi, la figure 4.10 montre une trace consistante à ce qu'on attendait tel qu'à la figure 4.2c. De plus, les fréquences de réponses obtenues et attendues sont biphasiques et similaires telles que montré aux figures 4.11 et 4.2b. De plus, la valeurs de fréquences sont presque identiques. Les valeurs obtenues sont juste sous 0.1 et 0.3. On peut donc confirmer que dans ce cas les résultats sont reproduits de façon acceptable.

#### 4.3.4 Résultats pour $r/L = 0.5$

La figure 4.12 montre la réponse temporelle de plusieurs variables qui peuvent être comparées à la figure 4.2a. Notamment la variable  $\theta$  qui est constante près de zéro tel qu'attendu. Aussi, la figure 4.13 montre une trace consistante à ce qu'on attendait tel qu'à la figure 4.2c. De plus, les fréquences de réponses obtenue et attendue sont monophasiques et similaires tel que montré à la figure 4.14 et comparée à la figure 4.2b. Par contre, les valeurs de fréquence sont différentes. La valeur obtenue est juste sous 0.2 et Weymouth obtient une valeur en haut de 0.4. Considérant qu'il est possible que l'oscillation soit d'origine numérique, il est difficile de déterminer si cette valeur est significative. On peut donc confirmer que dans ce cas les résultats sont reproduits de façon acceptable.

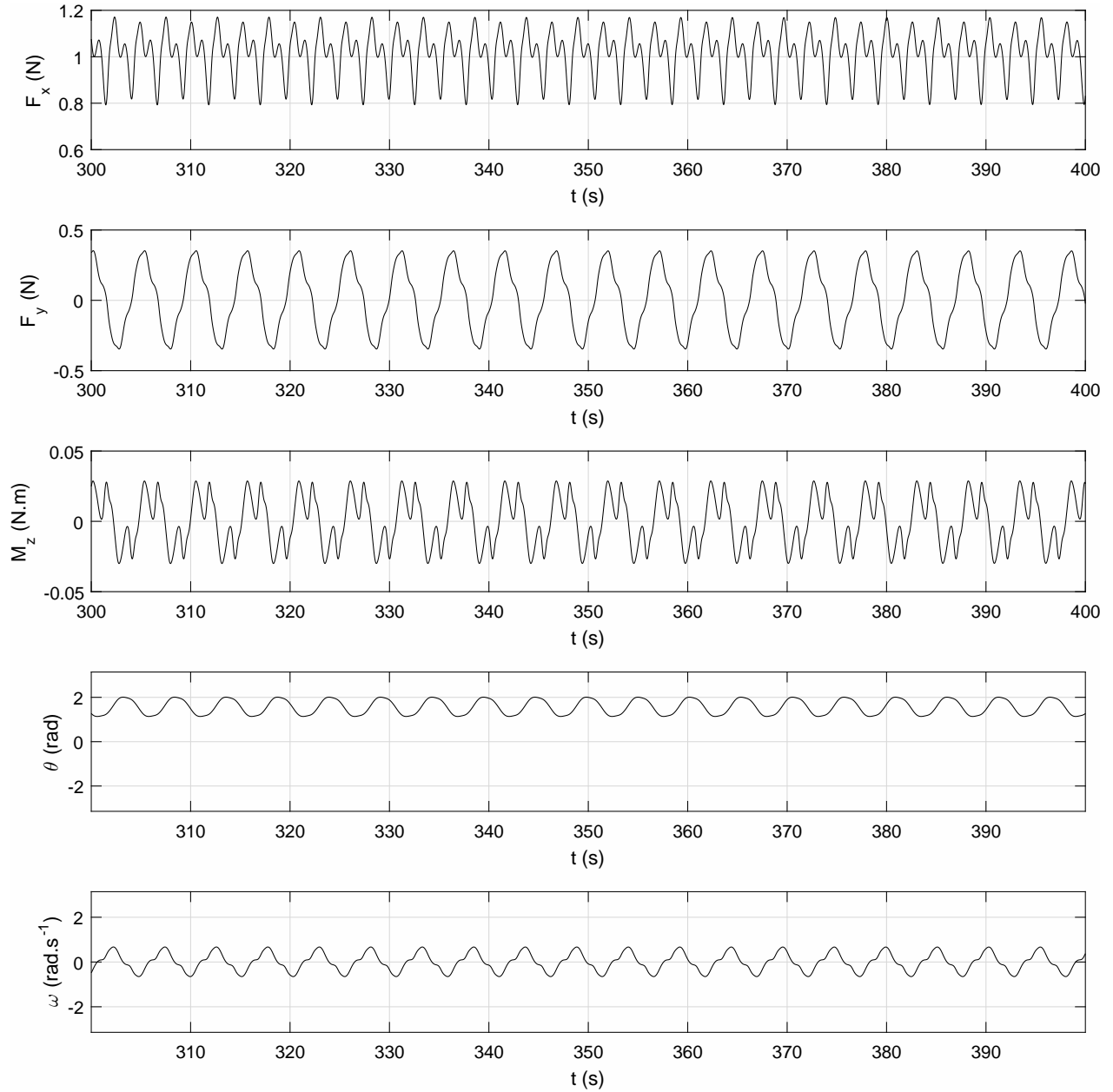


Figure 4.3 Réponse temporelle de la traînée, de la portance, du moment, de l'angle de rotation et de la vitesse angulaire de la reproduction des résultats de Weymouth par la méthode proposée. Elle peut être comparée à la ligne  $r/L = 0$  dans la figure 4.2a.

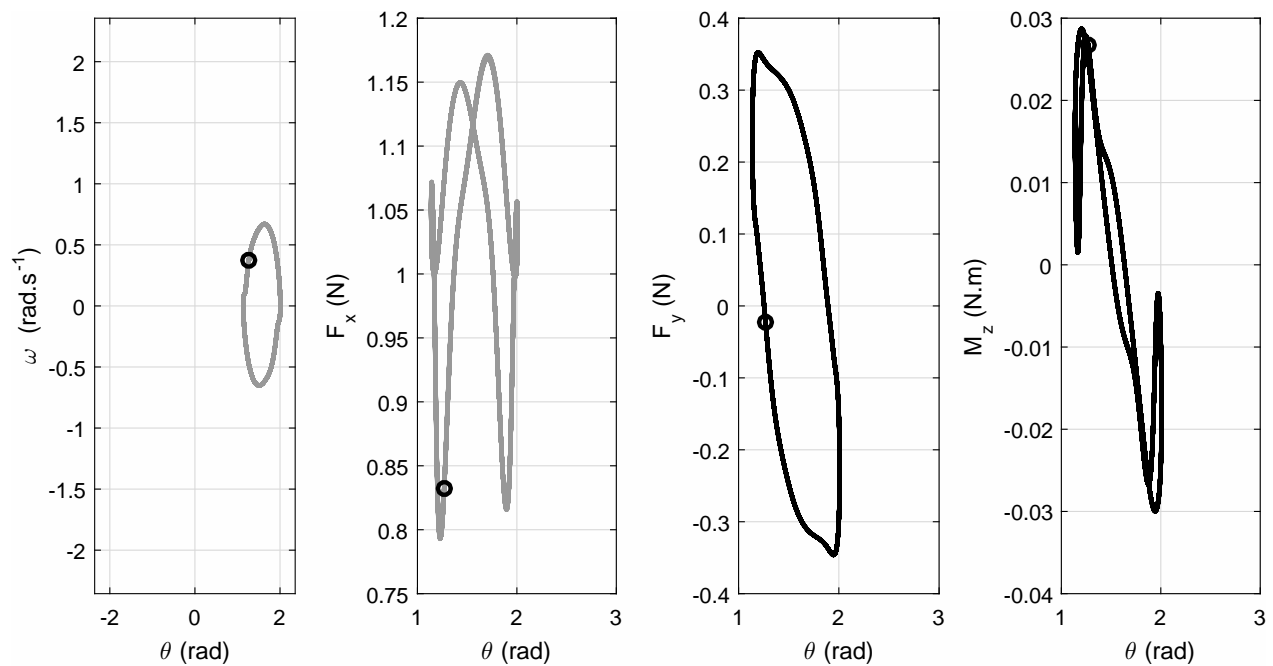


Figure 4.4 Diagramme de phase des réponses temporelles aux mesures prises de  $\omega$ ,  $F_x$ ,  $F_y$  et  $M_z$ . Elle peut être comparée au bloc  $r/L = 0$  dans la figure 4.2c.

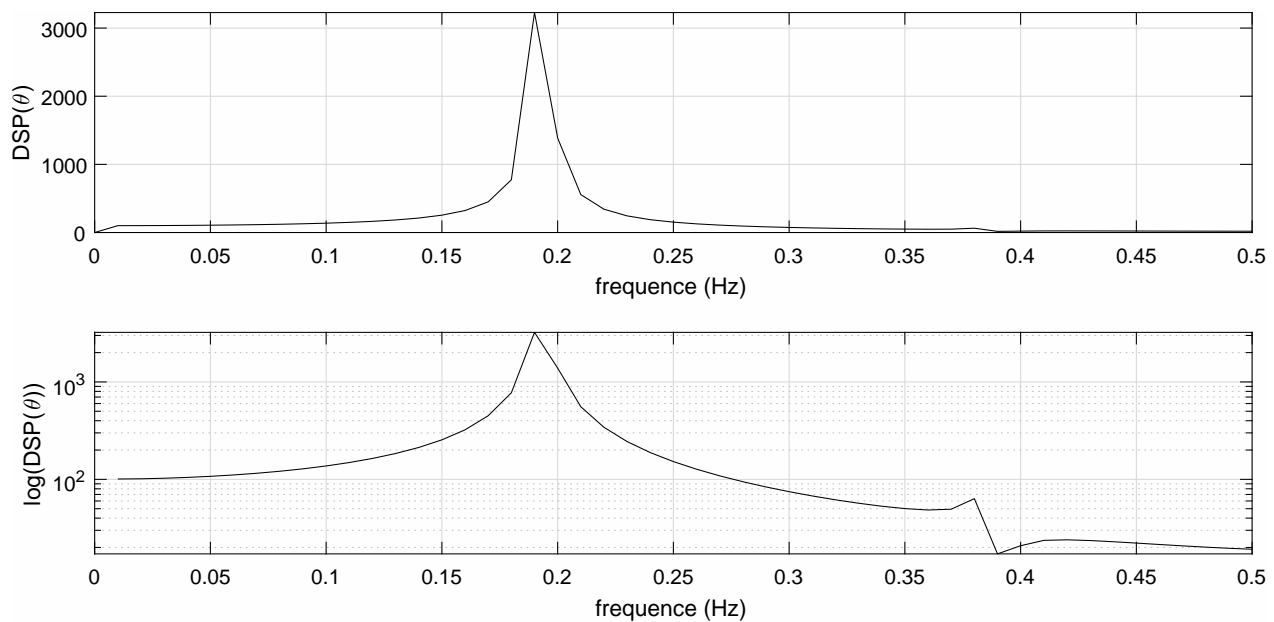


Figure 4.5 DSP de la réponse pour  $r/L = 0$ . Elle donne la réponse en fréquence de la simulation. Elle peut être comparée au bloc  $r/L = 0$  dans la figure 4.2b.

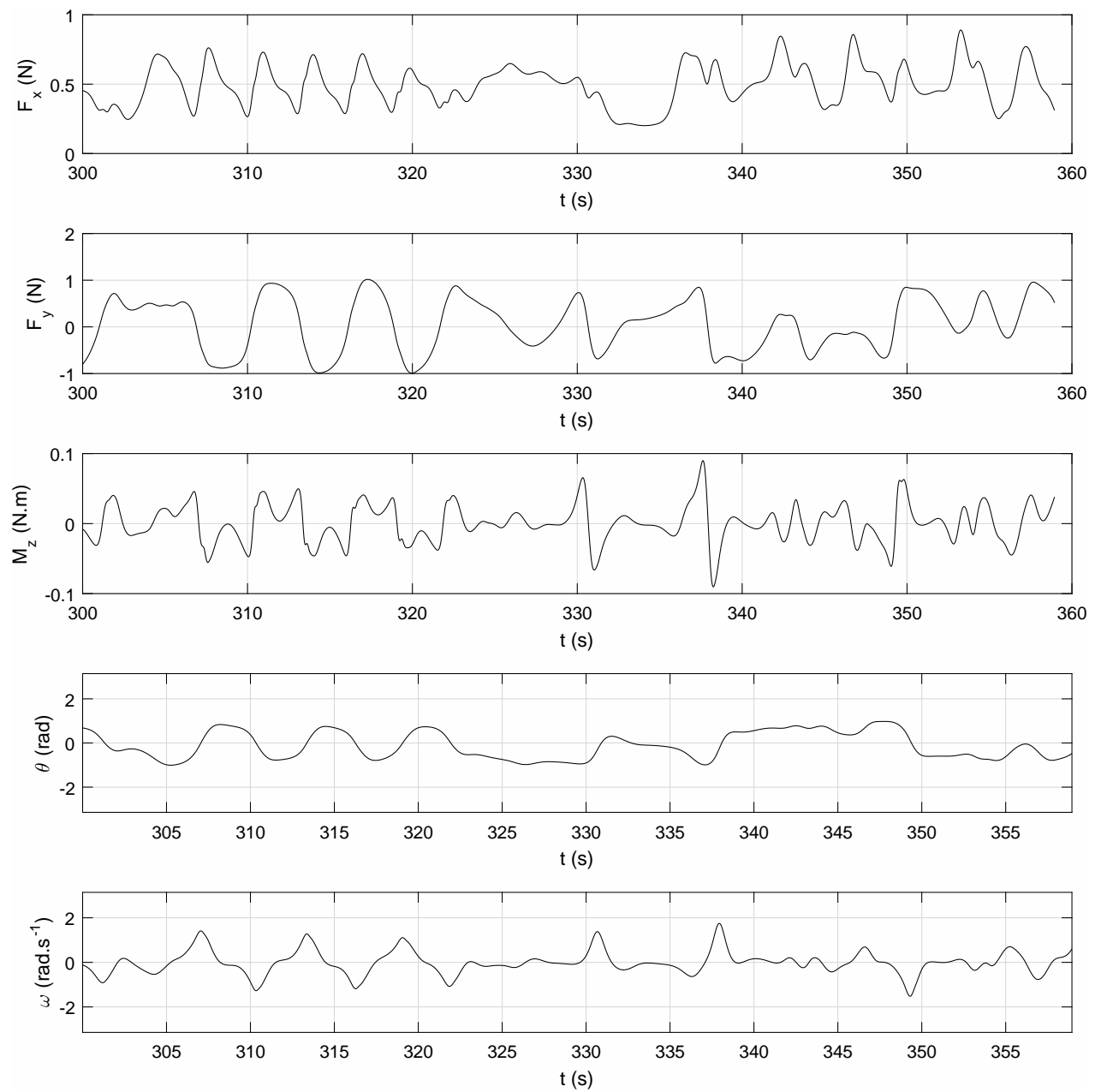


Figure 4.6 Réponse temporelle pour  $r/L = 0.16$

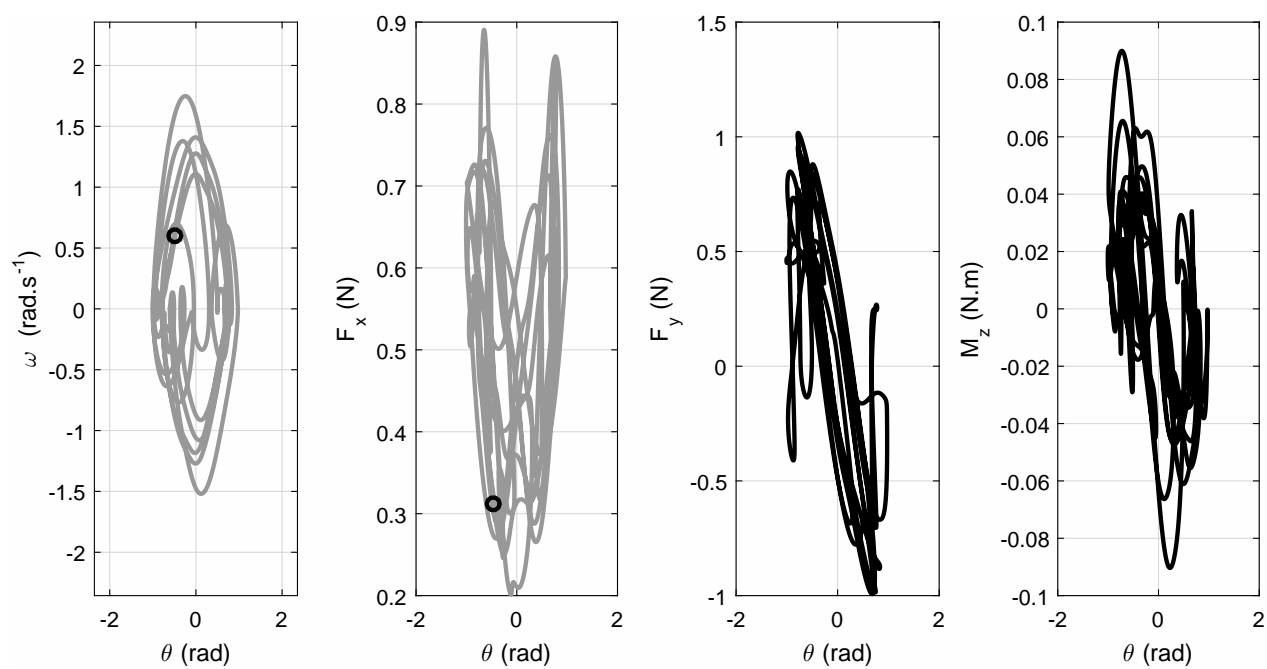


Figure 4.7 Diagramme de phase pour  $r/L = 0.16$

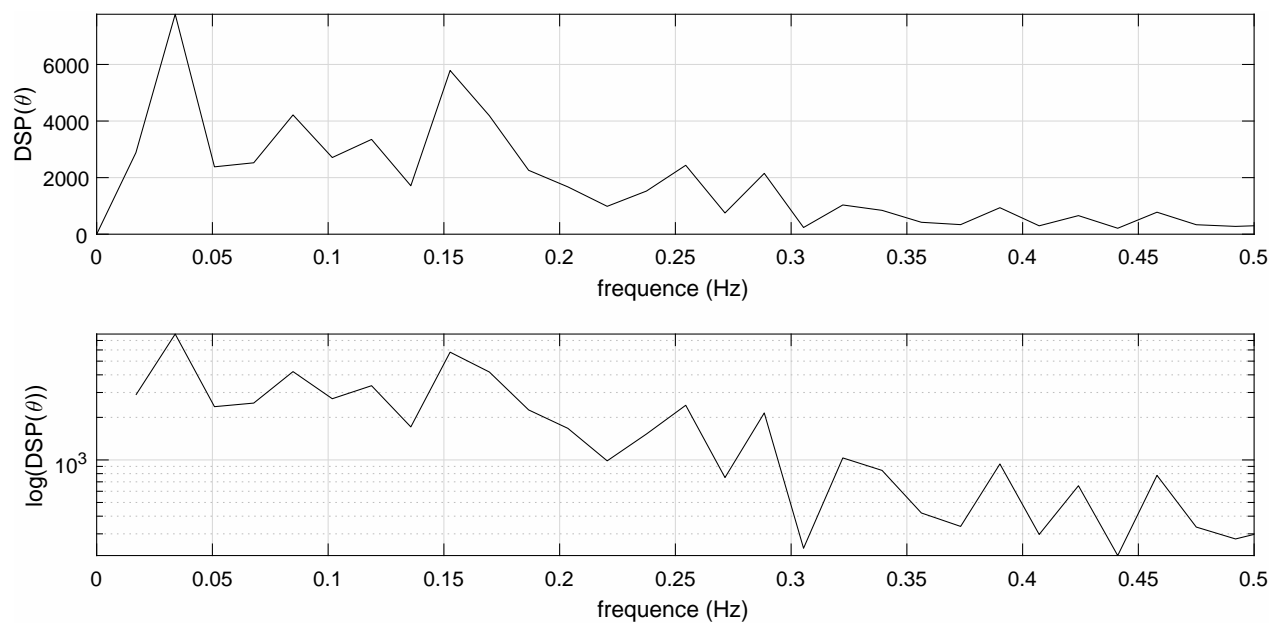


Figure 4.8 DSP pour  $r/L = 0.16$

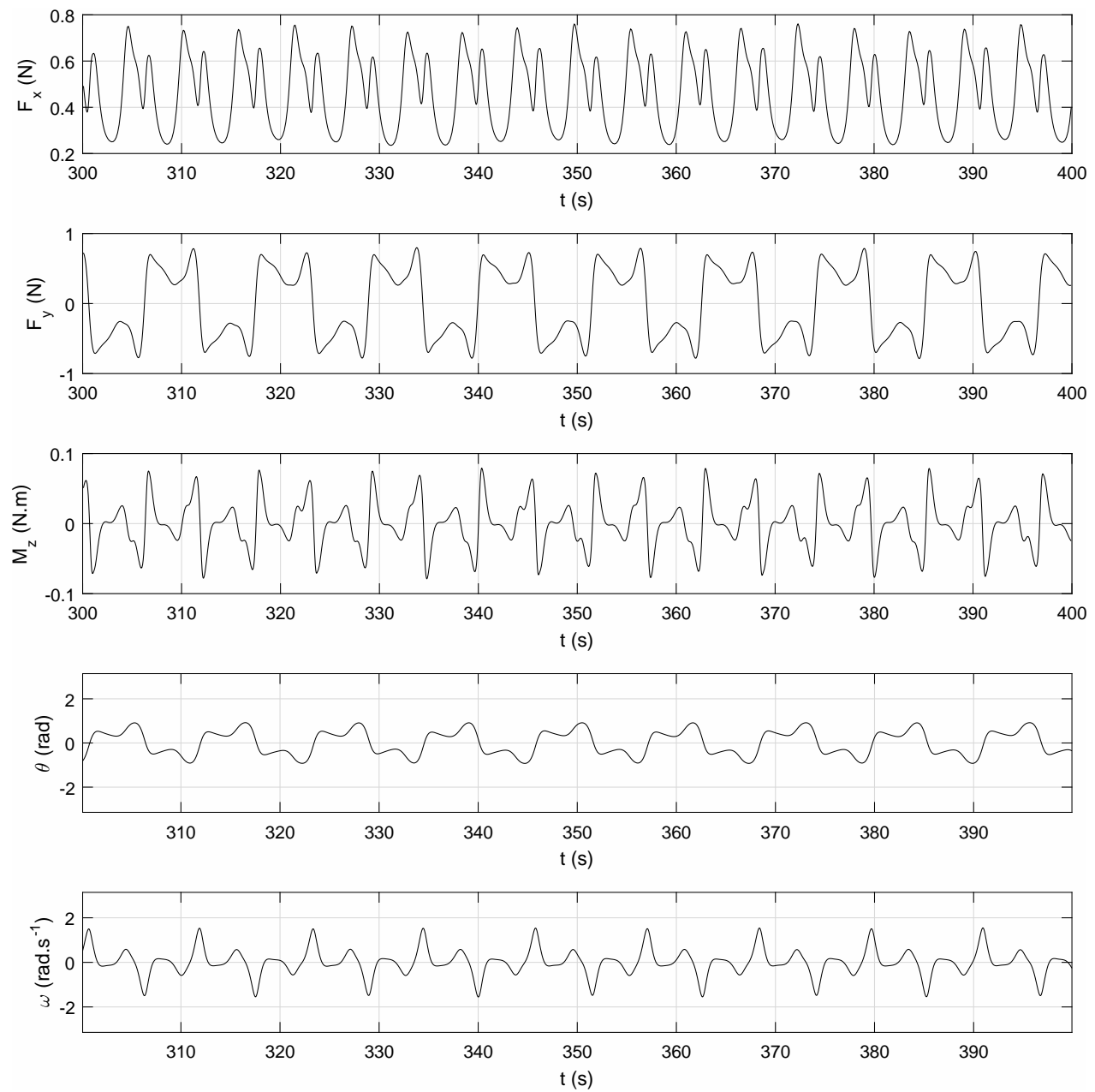


Figure 4.9 Réponse temporelle pour  $r/L = 0.18$

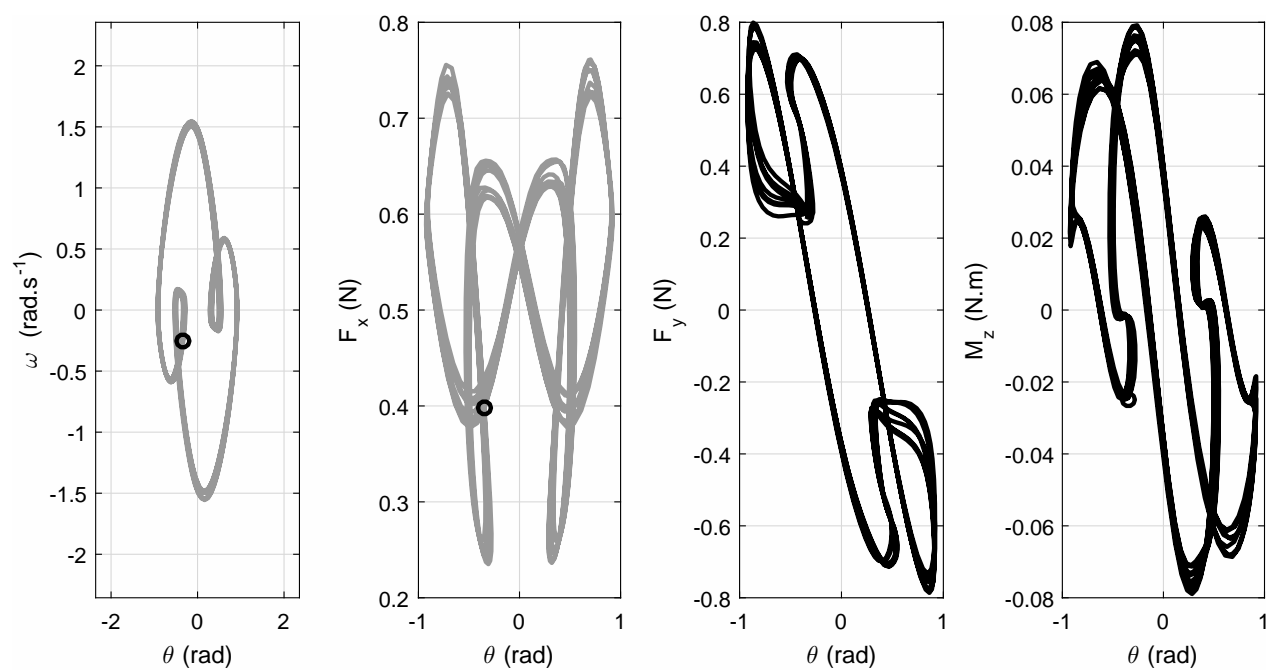


Figure 4.10 Diagramme de phase pour  $r/L = 0.18$

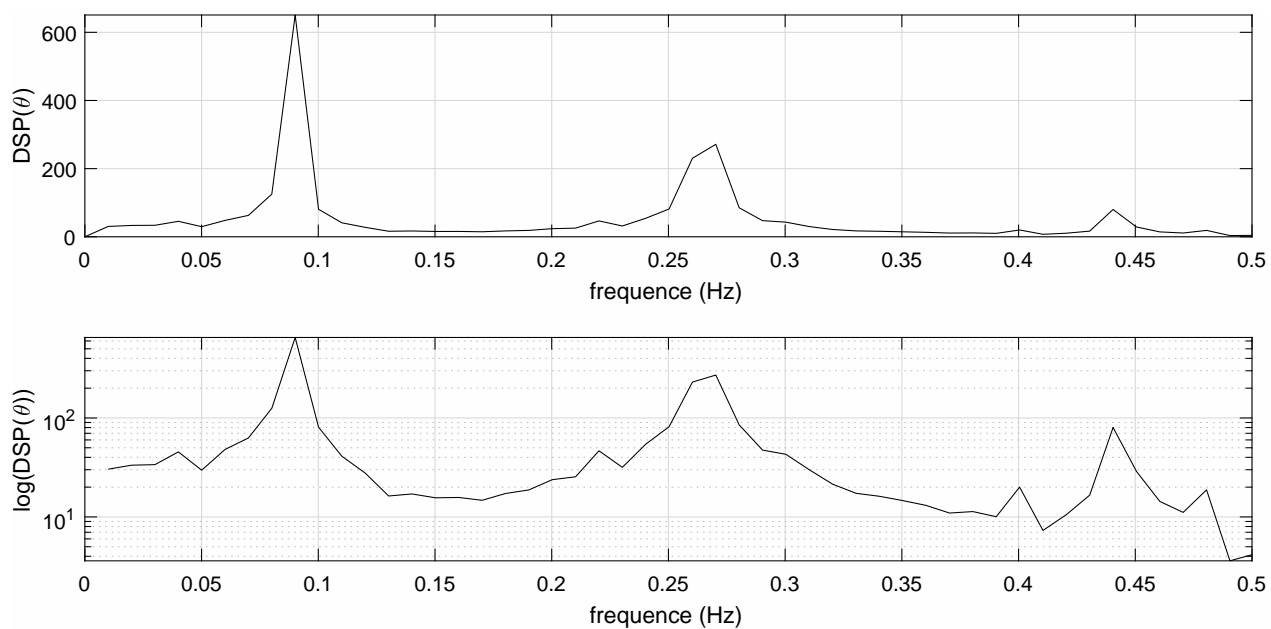


Figure 4.11 DSP pour  $r/L = 0.18$



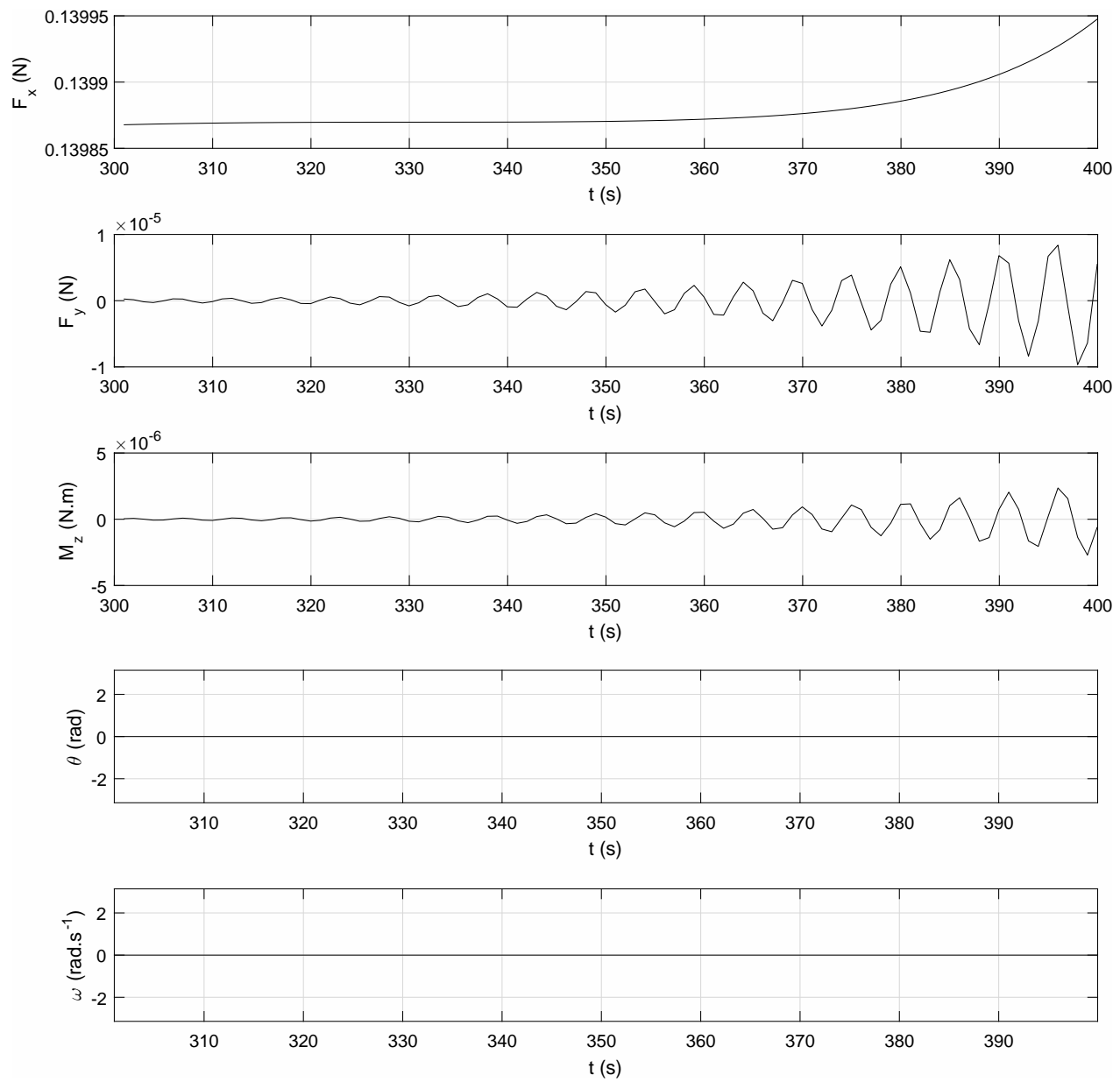


Figure 4.12 Réponse temporelle pour  $r/L = 0.5$ . Noter que les échelles sont presque constantes.

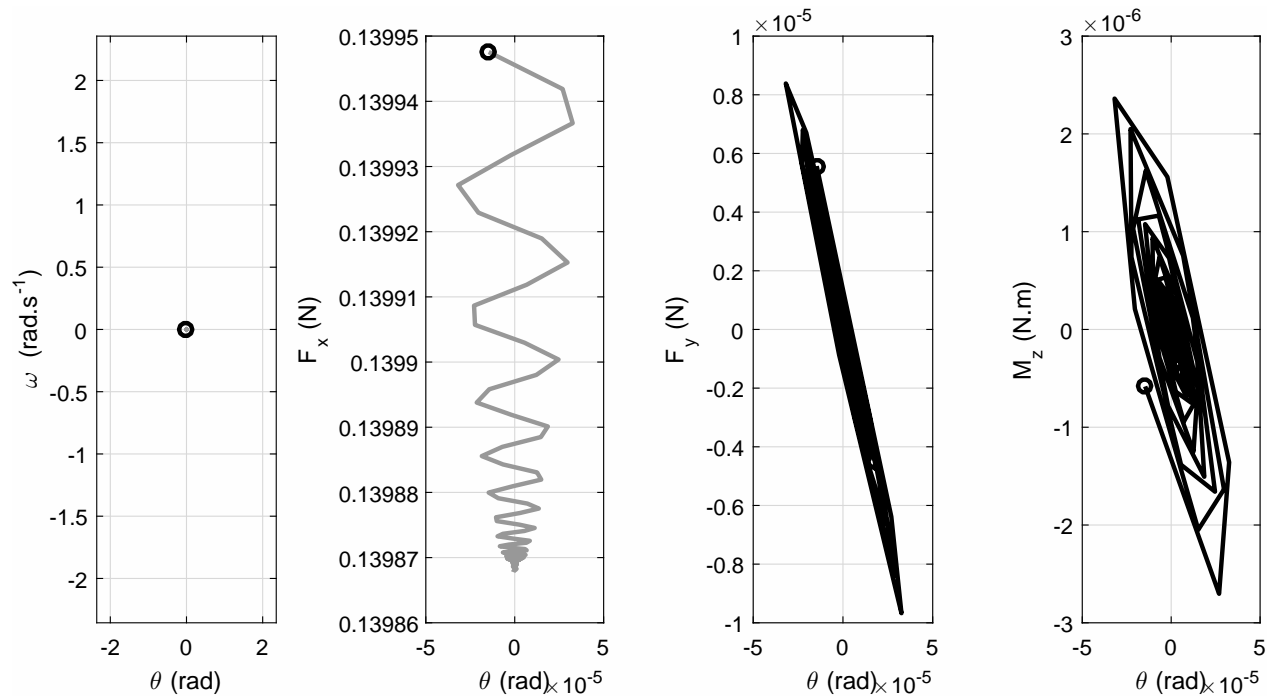


Figure 4.13 Diagramme de phase pour  $r/L = 0.5$

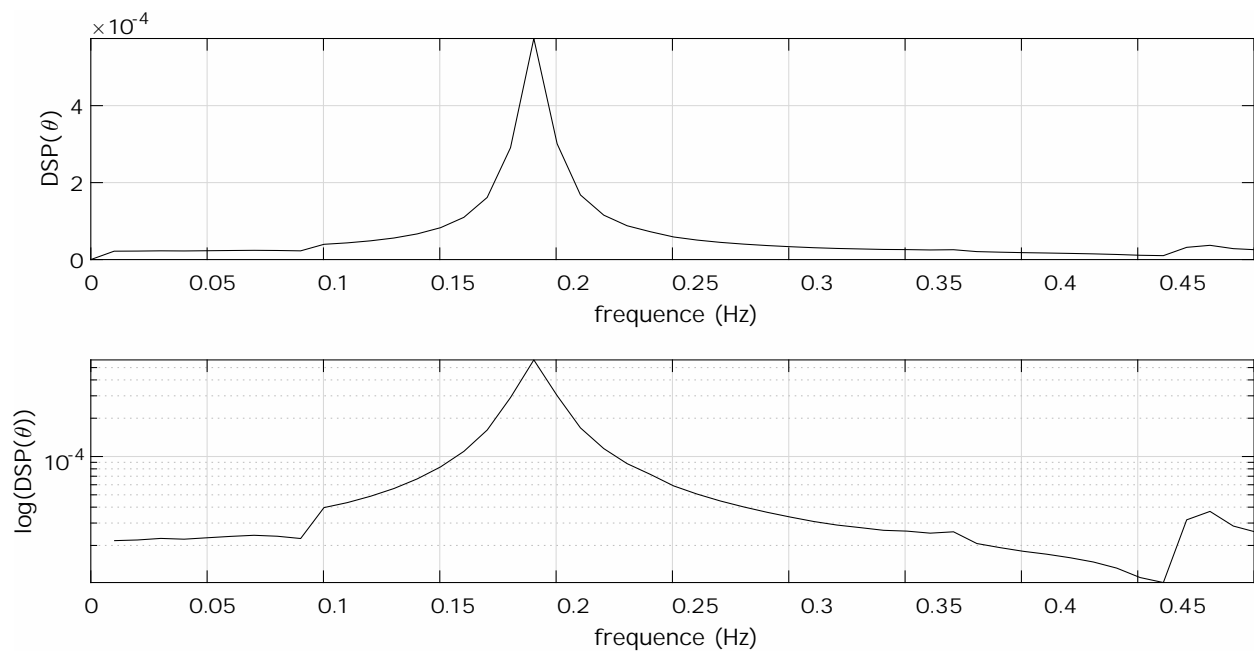


Figure 4.14 DSP pour  $r/L = 0.5$

## CHAPITRE 5 CONCLUSION

### 5.1 Synthèse des travaux

#### 5.1.1 Équations de Navier-Stokes non inertielles

La différence entre les formulations des équations de Navier-Stokes inertielle et non inertielle est la présence de termes de forces fictives qui permettent de prendre en compte l'accélération du repère. Ces termes incluent les forces d'Euler, de Coriolis et centrifuges. Cette formulation permet d'observer des objets fortement accélérés dans un écoulement pour lequel la forme inertielle des équations de Navier-Stokes où une étude stationnaire ne sont pas appropriées, c'est-à-dire que la forme inertielle de l'étude stationnaire ne tient pas compte de l'effet de l'accélération. La forme non inertielle des équations de Navier-Stokes permet de prendre en compte l'effet de l'accélération tout en conservant un maillage unique tout au long de la simulation.

#### 5.1.2 Conditions limites modifiées

Concernant les conditions limites nécessaires à la mise en œuvre de cette formulation, trois possibilités sont proposées. On considère qu'il est possible que des structures tourbillonnaires puissent être générées. La première est d'imposer des conditions de Dirichlet en vitesse en entrée et une pression de sortie ou une condition équivalente. Ceci nécessite que le domaine soit suffisamment grand pour que les structures aient le temps et l'espace pour se dissiper. La seconde est d'imposer des conditions de Dirichlet partout avec un point de pression imposé dans le domaine. Cette solution est simple, mais force une solution près des parois. Elle peut influencer la qualité des résultats obtenus. La troisième correspond à des conditions de Dirichlet en entrée et une condition qui permet la réinsertion du fluide sans que le problème devienne instable.

Les conditions de Dirichlet en rotation tiennent évidemment compte de la rotation imposée.

### 5.2 Simulations et résultats

Les portraits de phases vérifient que les résultats obtenus sont similaires à ceux déjà publiés (Weymouth, 2014).

### 5.3 Limitations de la solution proposée

Malgré ces avancements, il est à noter que le système d'équations résultant, pour une simulation au même nombre de degrés de liberté, a un conditionnement plus élevé avec des simplexes qu'avec des hypercubes. Ceci peut être balancé avec un maillage adaptatif dans lequel cas le coût peut en valoir la peine.

Les équations se veulent valides pour des objets fortement accélérés, mais elles sont basées sur les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ce cas est valide seulement pour des fluides très peu compressibles ou des médiums qui agissent comme des fluides très peu compressibles.

### 5.4 Améliorations futures

Les résultats de cette section sont surtout qualitatifs. Il serait pertinent d'étudier la convergence spatiale et temporelle de plusieurs cas tests et de solutions manufacturées. Une partie de ce travail a été fait dans le cadre de ce mémoire, cependant une démarche formelle, structurée et extensive serait nécessaire.

## RÉFÉRENCES

- I. Babuška et A. K. Aziz, “Lectures on mathematical foundations of the finite element method.” Maryland University, College Park Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Rapp. tech., 1972.
- G. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- M. Blyth et C. Pozrikidis, “A lobatto interpolation grid over the triangle”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 71, pp. 153–169, 2005.
- L. Bos, “Bounding the lebesgue function for lagrange interpolation in a simplex”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 38, no. 1, pp. 43–59, 1983.
- P. Bose et G. Toussaint, “No quadrangulation is extremely odd”, dans *International Symposium on Algorithms and Computation*. Springer, 1995, pp. 372–381.
- A. Bowyer, “Computing dirichlet tessellations”, *The computer journal*, vol. 24, no. 2, pp. 162–166, 1981.
- F. Brezzi, “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers”, *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, vol. 8, no. R2, pp. 129–151, 1974.
- Q. Chen et I. Babuška, “Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 128, no. 3-4, pp. 405–417, 1995.
- L. P. Chew, “Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces”, dans *Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*. ACM, 1993, pp. 274–280.
- M. Combrinck et L. Dala, “Eulerian derivations of non-inertial navier-stokes equations”, *29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, vol. 577, 2014.
- M. Combrinck, L. Dala, et I. Lipatov, “Eulerian derivation of non-inertial navier-stokes equations for compressible flow in constant, pure rotation”, 2015.
- , “Eulerian derivation of non-inertial navier-stokes and boundary layer equations for incompressible flow in constant pure rotation”, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 65, pp. 10–30, 2017.

R. Courant, “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations”, *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 49, no. 1, pp. 1–23, 1943.

R. Courant, K. Friedrichs, et H. Lewy, “Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik”, *Mathematische annalen*, vol. 100, no. 1, pp. 32–74, 1928.

M. Crouzeix et P.-A. Raviart, “Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations i”, *Revue française d’automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, vol. 7, no. R3, pp. 33–75, 1973.

G. Dahlquist et A. Bjork, “Equidistant interpolation and the runge phenomenon”, *Numerical Methods*, pp. 101–103, 1974.

B. Delaunay *et al.*, “Sur la sphere vide”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, vol. 7, no. 793-800, pp. 1–2, 1934.

S. Dong, G. E. Karniadakis, et C. Chrysosostomidis, “A robust and accurate outflow boundary condition for incompressible flow simulations on severely-truncated unbounded domains”, *Journal of Computational Physics*, vol. 261, pp. 83–105, 2014.

M. Fekete, “Über die verteilung der wurzeln bei gewissen algebraischen gleichungen mit ganzzahligen koeffizienten”, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 17, no. 1, pp. 228–249, 1923.

Fluent Ansys, “13.0 user’s guide”, *Ansys Inc*, 2010.

I. M. Gledhill, H. Roohani, K. Forsberg, P. Eliasson, B. W. Skews, et J. Nordström, “Theoretical treatment of fluid flow for accelerating bodies”, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 30, no. 5, pp. 449–467, 2016.

G. H. Golub et J. H. Welsch, “Calculation of gauss quadrature rules”, *Mathematics of computation*, vol. 23, no. 106, pp. 221–230, 1969.

D. Gottlieb et S. A. Orszag, *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. Siam, 1977, vol. 26.

F. L. Gozman, “Computation of gauss-jacobi, gauss-radau-jacobi and gauss-lobatto-jacobi quadrature formulae using golub-welsch method”. En ligne : <https://www.scribd.com/document/17057561/COMPUTATION-OF-GAUSS-JACOBI-GAUSS-RADAU-JACOBI-AND-GAUSS-LOBATTO-JACOBI-QUADRATURE-FORMULAE-USING-GOLUB-WELSCH-METHOD>

- H. P. Greenspan, “The theory of rotating fluids”, Massachusetts Institute of Technologies Cambridge Department of Mathematics, Rapp. tech., 1968.
- P. C. Hammer et A. H. Stroud, “Numerical integration over simplexes”, *Mathematics of Computation*, vol. 10, no. 55, pp. 137–139, 1956.
- A. Hrennikoff, “Solution of problems of elasticity by the framework method”, *Journal of applied mechanics*, vol. 8, no. 4, pp. 169–175, 1941.
- T. Hudson, *File :Coral Sphere Flynn Reef.jpg*. Wikipedia, Aug 2010. En ligne : [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Coral\\_Sphere\\_Flynn\\_Reef.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Coral_Sphere_Flynn_Reef.jpg)
- A. Kageyama et M. Hyodo, “Eulerian derivation of the coriolis force”, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, vol. 7, no. 2, 2006.
- G. Karniadakis et S. Sherwin, *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics*. Oxford University Press, 2013.
- H. Luo et C. Pozrikidis, “A lobatto interpolation grid in the tetrahedron”, *IMA journal of applied mathematics*, vol. 71, no. 2, pp. 298–313, 2006.
- A. T. Patera, “A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion”, *Journal of computational Physics*, vol. 54, no. 3, pp. 468–488, 1984.
- D. Pelletier, “Notes de cours d’Éléments finis en mécanique des fluides”, Janvier 2017.
- C. Pozrikidis, *Introduction to finite and spectral element methods using MATLAB*. CRC Press, 2005.
- J. Proriot, “Sur une famille de polynomes á deux variables orthogonaux dans un triangle”, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’académie des sciences*, vol. 245, no. 26, pp. 2459–2461, 1957.
- T. Raux, “Étude de conditions limites de sortie pour la méthode des éléments finis”, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- W. Ritz, “Über eine neue methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 135, pp. 1–61, 1909.
- H. Roohani et B. Skews, “Unsteady aerodynamic effects experienced by aerofoils during acceleration and retardation”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 222, no. 5, pp. 631–636, 2008.

C. Runge, “Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten”, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 46, no. 224-243, p. 20, 1901.

J. Ruppert, “A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation”, *Journal of algorithms*, vol. 18, no. 3, pp. 548–585, 1995.

E. B. Saff et A. B. Kuijlaars, “Distributing many points on a sphere”, *The mathematical intelligencer*, vol. 19, no. 1, pp. 5–11, 1997.

S. Smale, “Mathematical problems for the next century”, *The mathematical intelligencer*, vol. 20, no. 2, pp. 7–15, 1998.

STAR-CD User Guide, “CD adapco Group”, *Google Scholar*, 2004.

J. L. Steger, F. C. Dougherty, et J. A. Benek, “A chimera grid scheme.[multiple overset body-conforming mesh system for finite difference adaptation to complex aircraft configurations]”, 1983.

P. M. L. Tammes, “On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains”, *Recueil des travaux botaniques néerlandais*, vol. 27, no. 1, pp. 1–84, 1930.

C. Taylor et P. Hood, “A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique”, *Computers & Fluids*, vol. 1, no. 1, pp. 73–100, 1973.

V. Totik, “Orthogonal polynomials”, *Surveys in Approximation Theory*, vol. 1, pp. 70–125, 2005.

M. Turner, “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, *journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 23, no. 9, pp. 805–823, 1956.

G. von Winckel, “n-dimensional simplex quadrature”, Décembre 2005.

D. F. Watson, “Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes”, *The computer journal*, vol. 24, no. 2, pp. 167–172, 1981.

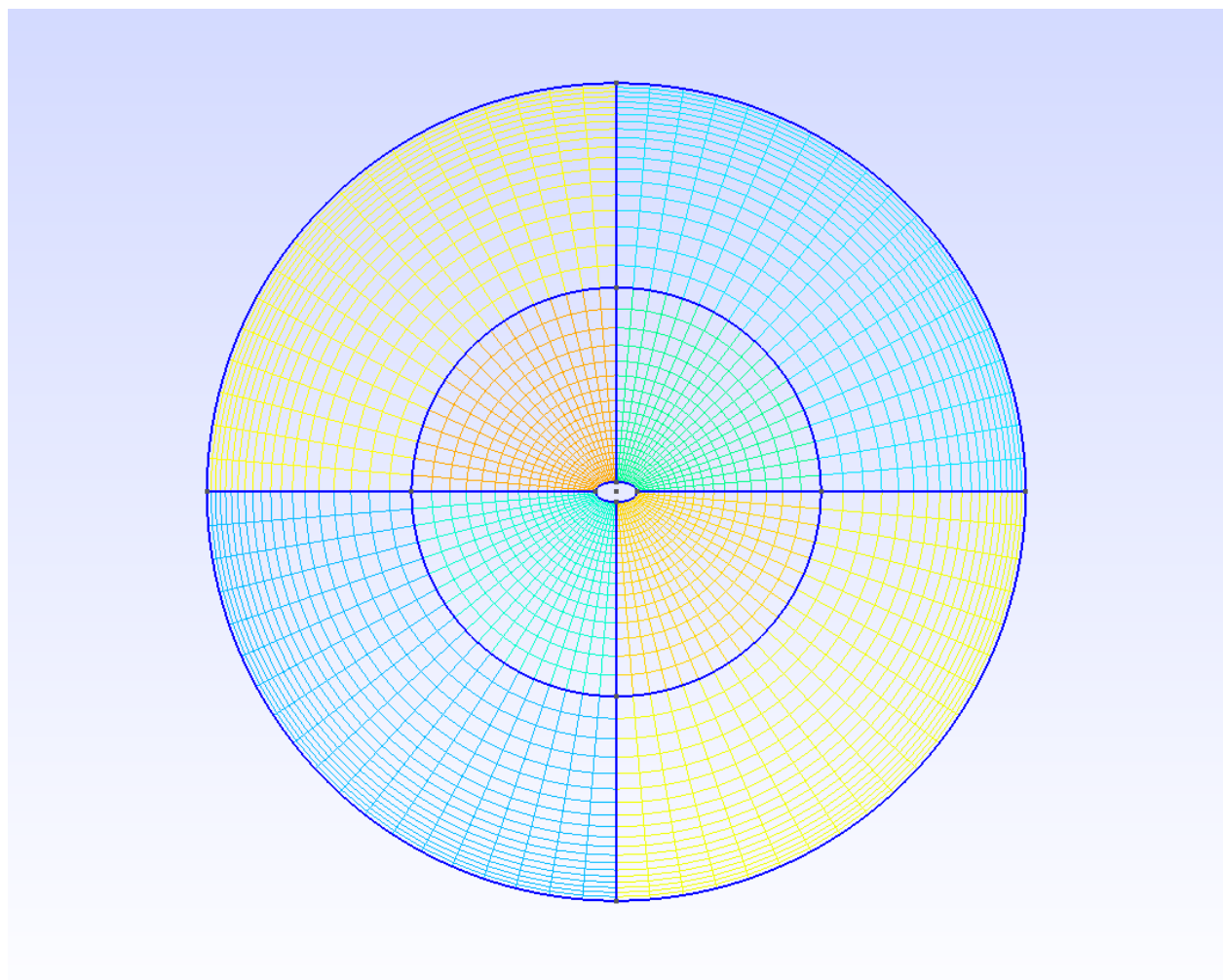
Waugtsberg, *Bienenwabe mit Eiern und Brut 5.jpg*. Wikipedia, Avril 2017. En ligne : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bienenwabe\\_mit\\_Eiern\\_und\\_Brut\\_5.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bienenwabe_mit_Eiern_und_Brut_5.jpg)

G. Weymouth, “Chaotic rotation of a towed elliptical cylinder”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 743, pp. 385–398, 2014.



## ANNEXE A    Maillage

Exemple de maillage utilisé pour les simulations.



## ANNEXE B    Calcul de l'interpolant sur un triangle

Le code matlab suivant calcule la discrétisation basée sur la base polynomiale de Prorior étant donné un groupe de points de collocation.

```
function [P2,dPdx2,dPdy2]=prorior12dSym(nDeg,xy,xyRef)
%Soit
%nDeg, le degré de l'interpolant désiré
%xy, les points où on désire les valeurs
%xyRef, les points de collocation désirés

syms zeta eta real

filename=['polynomeTrian' num2str(nDeg) '.mat'];

npts=(nDeg+1)*(nDeg+2)/2;

% % % Les calculs sont effectués seulement si les fichiers n'existent pas
if exist(filename,'file')==2
% % %     On importe les fichiers si ils existent
    load(filename);
else

% % %     On effectue la transformation de Duffy
    zetaPrime=2*zeta/(1-eta)-1;
    etaPrime=2*eta-1;

% % %     On construit le polynôme de base et ses dérivés
    polynome=sym(zeros(1,npts));

    alpha=0;
    for k=0:nDeg
        for elle=0:nDeg-k
```

```

        alpha=alpha+1;
        polynome(alpha)=legendreP(k,zetaPrime)*
        ... (1-eta)^k*jacobiP(elle,2*k+1,0,etaPrime);

    end
end

    polynome=simplify(polynome);
    dpolynomedzeta=diff(polynome,zeta);
    dpolynomedeta=diff(polynome,eta);
% % %    On sauvegarde pour éviter d'avoir à calculer plus d'une fois
    save(filename,'polynome','dpolynomedzeta','dpolynomedeta');
end

% % % On transforme les équations symboliques en fonction matlab plus
% rapide à évaluées
f=matlabFunction(polynome,'Vars',[zeta eta]);
fx=matlabFunction(dpolynomedzeta,'Vars',[zeta eta]);
fy=matlabFunction(dpolynomedeta,'Vars',[zeta eta]);

% % % On discrétise les fonctions sur les points de collocations
zeta=xyRef(1,:);
eta=xyRef(2,:);

P=zeros(length(eta));
for i=1:length(eta)
    P(:,i)=f(zeta(i),eta(i))';
end

zeta=xy(1,:);
eta=xy(2,:);

P2=zeros(npts,length(eta));
dPdx2=P2;
dPdy2=P2;
for i=1:length(eta)

```

```
P2(:,i)=f(zeta(i),eta(i));
dPdx2(:,i)=fx(zeta(i),eta(i));
dPdy2(:,i)=fy(zeta(i),eta(i));
end
% % On résout le système pour obtenir les interpolants et leurs dérivés
P2=P\P2;
dPdx2=P\dPdx2;
dPdy2=P\dPdy2;

end
```

## ANNEXE C    Calcul de l'interpolant sur un tétraèdre

Le code matlab suivant calcule la discrétisation basée sur la base polynomiale de Proriorl étant donné un groupe de points de collocation.

```
function [P2,dPdx2,dPdy2,dPdz2]=proriorl3dSym(nDeg,xyz,xyzRef)
% calcul du polynome de proriorl
%Soit
%nDeg, le degré de l'interpolant désiré
%xyz, les points où on désire les valeurs
%xyzRef, les points de collocation désirés
% note: P est la matrice de vandermonde modifiée

syms xi eta zeta real

filename=['polynomeTetra' num2str(nDeg) '.mat'];

npts=(nDeg+1)*(nDeg+2)*(nDeg+3)/6;

if exist(filename,'file')==2
    load(filename);
else

    zetaPrime=2*zeta-1;
    etaPrime=4*eta./(1-zetaPrime)-1;
    xiPrime=8*xi./(1-etaPrime)./(1-zetaPrime)-1;

    polynome=sym(zeros(npts,1));

    alpha=0;
    for k=0:nDeg
        for elle=0:nDeg-k
            for p=0:nDeg-k-elle
```

```

        alpha=alpha+1;
        % [k elle p]
        polynome(alpha)=legendreP(k,xiPrime)*...
        jacobiP(elle,2*k+1,0,etaPrime)*...
        jacobiP(p,2*k+2*elle+2,0,zetaPrime)*...
        ((1-etaPrime)/2)^k*((1-zetaPrime)/2)^(k+elle);
    end
end
end

polynome=simplify(polynome);
dpolynomedxi=diff(polynome,xi);
dpolynomedeta=diff(polynome,eta);
dpolynomedzeta=diff(polynome,zeta);

save(filename,'polynome','dpolynomedxi','dpolynomedeta','dpolynomedzeta');
end

f=matlabFunction(polynome,'Vars',[xi eta zeta]);
fx=matlabFunction(dpolynomedxi,'Vars',[xi eta zeta]);
fy=matlabFunction(dpolynomedeta,'Vars',[xi eta zeta]);
fz=matlabFunction(dpolynomedzeta,'Vars',[xi eta zeta]);

xi=xyzRef(1,:);
eta=xyzRef(2,:);
zeta=xyzRef(3,:);

P=zeros(length(eta));
for i=1:length(eta)
    P(:,i)=f(xi(i),eta(i),zeta(i));
end

%% calcul de l'interpolant
xi=xyz(1,:);
eta=xyz(2,:);
zeta=xyz(3,:);

```

```

P2=zeros(npts,length(eta));
dPdx2=P2;
dPdy2=P2;
dPdz2=P2;
for i=1:length(eta)
    P2(:,i)=f(xi(i),eta(i),zeta(i));
    dPdx2(:,i)=fx(xi(i),eta(i),zeta(i));
    dPdy2(:,i)=fy(xi(i),eta(i),zeta(i));
    dPdz2(:,i)=fz(xi(i),eta(i),zeta(i));
end
P2=P\P2;
dPdx2=P\dPdx2;
dPdy2=P\dPdy2;
dPdz2=P\dPdz2;

end

```

## ANNEXE D Exemples de points de Blyth

Tableau D.1 Exemple de points en 2 dimensions pour  $m = 3$

x	y
0.0000	0.2764
0.7236	1.0000
0.0000	0.3333
0.7236	0.0000
0.2764	0.0000
0.0000	0.0000
0.0000	0.0000
0.2764	0.3333
0.2764	0.7236
0.7236	1.0000

Tableau D.2 Exemple de points en 2 dimensions pour  $m = 4$

x	y
0.0000	0.1727
0.5000	0.8273
1.0000	0.0000
0.2242	0.5516
0.8273	0.0000
0.2242	0.5000
0.0000	0.1727
0.0000	0.0000
0.0000	0.0000
0.0000	0.0000
0.1727	0.2242
0.2242	0.1727
0.5000	0.5516
0.5000	0.8273
0.8273	1.0000



## ANNEXE E    Exemples de points de Luo

Tableau E.1 Exemple de points en 3 dimensions pour  $m=3$

x	y	z
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.2764	0.3333
0.2764	0.7236	0.7236
1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.3333	0.2764
0.7236	0.3333	0.0000
0.2764	0.7236	1.0000
0.0000	0.3333	0.7236
0.0000	0.2764	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.3333	0.2764	0.7236
0.0000	0.0000	0.0000
0.3333	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.2764
0.7236	1.0000	0.3333
0.7236	0.2764	0.3333
0.7236	0.2764	0.3333

Tableau E.2 Exemple de points en 3 dimensions pour m=4

x	y	z
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1727
0.2242	0.2242	0.1727
0.5000	0.5516	0.5000
0.8273	0.8273	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.2242	0.2242
0.1727	0.5516	0.5000
0.8273	0.2242	0.2242
0.5516	0.2500	0.0000
0.1727	0.5000	0.8273
1.0000	0.0000	0.2242
0.5516	0.8273	0.0000
0.2242	0.5000	0.0000
0.1727	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.2242	0.2242	0.1727
0.5516	0.5000	0.8273
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.2242	0.5516	0.2242
0.2500	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.1727	0.5000
0.8273	1.0000	0.2242
0.5516	0.8273	0.2242
0.5000	0.1727	0.2242
0.5516	0.8273	0.2242
0.5000	0.1727	0.5516
0.2242	0.2242	0.2500